MỤC LỤC

0. LỜI NÓI ĐẦU 3
1. Chương 1 5
NHẬP MÔN ĐỘNG LỰC HỌC HỆ NHIỀU VẬT 5
1.1. GIỚI THIỆU ĐỘNG LỰC HỌC HỆ NHIỀU VẬT 5
1.2. NHỮNG KHÁI NIỆM CƠ BẢN 8
1.3. CÔNG CỤ TOÁN HỌC PHÂN TÍCH ĐỘNG LỰC HỌC HỆ NHIỀU VẬT 26
1.4. CÔNG CỤ TOÁN, TIN HỌC PHÂN TÍCH ĐỘNG LỰC HỌC HỆ NHIỀU VẬT 38
2. Chương 2 67
ĐỘNG HỌC VẬT RẮN 67
2.1. XÁC ĐỊNH VỊ TRÍ VÀ HƯỚNG CỦA VẬT RẮN TRONG KHÔNG GIAN 67
2.2. VẬN TỐC GÓC VÀ GIA TỐC GÓC CỦA VẬT RẮN 78
2.3. CỘNG VẬN TỐC GÓC VÀ GIA TỐC GÓC 89
2.4. CÁC TỌA ĐỘ SUY RỘNG XÁC ĐỊNH HƯỚNG CỦA VẬT RẮN 92
2.5. XÁC ĐỊNH VẬN TỐC, GIA TỐC CỦA ĐIỂM THUỘC VẬT RẮN 107
3. Chương 3 110
ĐỘNG HỌC HỆ NHIỀU VẬT 110
3.1. ĐỘNG HỌC HÌNH HỌC 110
3.2. ĐỘNG HỌC VI PHÂN 126
4. Chương 4 134
ĐỘNG LỰC HỌC VẬT RẮN 134
4.1. CÁC THÔNG SỐ ĐỘNG LỰC HỌC VẬT RẮN 134

4.2. ĐỘNG LƯỢNG, MÔMEN ĐỘNG LƯỢNG, ĐỘNG NĂNG CỦA VẬT RẮN 145
4.3. ĐỊNH LÝ BIẾN THIÊN ĐỘNG LƯỢNG, MÔMEN ĐỘNG LƯỢNG 153
4.4. CÁC PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CHUYỂN ĐỘNG CỦA VẬT RẮN 162
5. Chương 5 175
ĐỘNG LỰC HỌC HỆ NHIỀU VẬT 175
5.1. PHƯƠNG PHÁP TIẾP CẬN ĐỘNG LỰC HỌC HỆ NHIỀU VẬT 175
5.2. CÁC PHƯƠNG TRÌNH NEWTON – EULER 177
5.3. PHƯƠNG TRÌNH LAGRANGE LOẠI HAI CỦA HỆ NHIỀU VẬT 206
5.4. PHƯƠNG TRÌNH LAGRANGE DẠNG NHÂN TỬ CỦA HỆ NHIỀU VẬT 218
5.5. PHƯƠNG PHÁP TÁCH CẤU TRÚC TRONG HỆ NHIỀU VẬT 222
5.6. GIỚI THIỆU CÁC PHƯƠNG TRÌNH KHÁC CỦA HỆ NHIỀU VẬT 240
6. TÀI LIỆU THAM KHẢO 280
7. PHỤ LỤC 281

DO NOT COPY

0. LỜI NÓI ĐẦU

Cuốn sách "Động lực học hệ nhiều vật" được biên soạn làm giáo trình chính phục vụ việc giảng dạy và học tập môn học "Động lực học hệ nhiều vật" đối với sinh viên chuyên ngành Cơ điện tử tại Học viện Kỹ thuật Quân sự. Nó cũng có thể sử dụng làm các tài liệu tham khảo cho các đối tượng học viên, sinh viên và các nhà nghiên cứu hoạt động trong lĩnh vực cơ học và động lực học.

Giáo trình trình bày các kiến thức về cơ hệ nhiều vật từ cơ bản đến nâng cao, từ mô hình một vật rắn đến cơ hệ gồm nhiều vật rắn, cung cấp các kiến thức cho phép người học có thể mô hình hóa một hệ vật lý thành mô hình cơ học, mô hình toán học, từ đó làm cơ sở thiết kế các mô hình điều khiển. Trong giáo trình, ngoài việc trình bày các lý thuyết tổng quát, các tác giả còn đề cập tới các ví dụ áp dụng thực hành cụ thể với các đối tượng đặc trưng khác nhau tạo điều kiện cho người học có cách nhìn nhận tổng quát nhất về động học và động lực học của một cơ hệ.

Để học viên, sinh viên nắm được tốt nhất các kiến thức được trình bày trong giáo trình này, đòi hỏi người học phải học những môn đại cương và cơ sở ngành như Toán học cao cấp, Phương pháp tính, Vật lý đại cương, Cơ học kỹ thuật,….

Nội dung cụ thể của giáo trình được chia thành 5 chương:

Chương 1, trình bày những khái niệm cơ bản nhập môn cơ hệ nhiều vật, bổ sung một số khái niệm về toán học và cơ học.

Chương 2, trình bày các vấn đề về động học của vật rắn.

Chương 3, trình bày về động học hệ nhiều vật (phân loại, động học hình học, động học vi phân).

Chương 4, các tác giả trình bày về động lượng, mômen động lượng, động năng của vật rắn.

Chương 5, các tác giả đi vào giới thiệu về động lực học hệ nhiều vật.

Để hoàn thiện giáo trình này, nhóm tác giả tỏ lời cảm ơn sâu sắc tới PGS. TS. Vũ Công Hàm, PGS. TS. Chu Anh Mỳ và các bạn đồng nghiệp, những người đã dành nhiều thời gian và công sức để đọc và đóng góp cho các tác giả để hoàn thiện nội dung của quấn sách.

Do thời gian và hiểu biến của các tác giả còn hạn chế nên không thể tránh khỏi những thiếu sót. Nhóm tác giả rất mong tiếp tục nhận được những ý kiến đóng góp từ các bạn đồng nghiệp và bàn đọc để có thể tiếp tục hoàn thiện cuốn sách trong các lần tái bản tiếp theo.

Các ý kiến đóng góp xin gửi về địa chỉ: *Bộ môn Robot đặc biệt và Cơ điện tử – Khoa Hàng không vũ trụ – Học viện Kỹ thuật Quân sự – 236 – Hoàng Quốc Viêt – Cổ Nhuế 1 – Bắc Từ liên – Hà Nội.*

Các tác giả

DO NOT COPY

1. Chương 1
NHẬP MÔN ĐỘNG LỰC HỌC HỆ NHIỀU VẬT

1.1. GIỚI THIỆU ĐỘNG LỰC HỌC HỆ NHIỀU VẬT

1.1.1. Khái niệm hệ nhiều vật

Có thể hiểu vật rắn là một không gian vật chất được giới hạn bởi một bề mặt khép kín, bề mặt này thuộc về không gian vật chất đó. Trong điều kiện bình thường, khi không có những tác động đặc biệt (như sự thay đổi nhiệt độ, độ ẩm hay tương tác, …) hình dạng và kích thước của các vật rắn hầu như không thay đổi. Nói chung, để duy trì sự bền vững về hình dáng và kích thước, các vật rắn không cần đến các vật đựng. Đặc điểm quan trọng này dùng để phân biệt vật rắn đối với các vật chất khác như khối chất lỏng hay khối chất khí.

Mức độ thay đổi hình dáng và kích thước của vật rắn do các tác động ngoài cũng rất khác nhau. Một số loại vật rắn dễ thay đổi hình dáng và kích thước hơn so với những loại khác. Có thể nhận thấy rõ điều này khi so sánh các dây mềm (như dây cáp, dây đai) với những chi tiết máy làm bằng gang, thép, thậm chí bằng gỗ. Chúng ta gọi sự thay đổi nói chung về hình dáng và kích thước của vật rắn là biến dạng. Trong thực tế, tất cả các vật đều ít bị biến dạng dưới sự tác động của các yếu tố bên ngoài. Nếu biến dạng của vật rắn có thể bỏ qua được trong phạm vi khảo sát, ta có vật rắn tuyệt đối. Trong trường hợp ngược lại, chúng ta có vật rắn biến dạng. Theo đó, phần cơ học chuyên nghiên cứu chuyển động và tương tác của các vật rắn cũng được phân chia thành cơ học vật rắn tuyệt đối và cơ học vật rắn biến dạng.

Trong cơ học, khái niệm ***chất điểm*** được hiểu theo hai nghĩa:

- *Là một điểm vật chất thuộc vật rắn xác định*. Điểm vật chất này có khối lượng và kích thước được kể đến mặc dù chúng rất nhỏ (vô cùng bé). Cách hiểu này thường được sử dụng trong bài toán đòi hỏi phải chia vật rắn thành những phân tố vật chất vô cùng bé rồi sử dụng phép lấy tổng hay tích phân. Khi xác định tọa độ trọng tâm của vật rắn đồng chất hay khi tính

mômen quán tính khối lượng của nó đối với một trục xác định, người ta thường sử dụng khái niệm chất điểm theo cách này.

- *Là vật rắn hoặc cơ hệ mà kích thước của nó có thể bỏ qua so với quỹ đạo chuyển động*. Cách hiểu này thường được sử dụng khi khảo sát chuyển động chung của cả vật hoặc cơ hệ, không quan tâm đến chuyển động tương đối của các bộ phận nhỏ còn lại. Chẳng hạn, khi khảo sát chuyển động của trái đất trên quỹ đạo của nó trong hệ mặt trời, chuyển động của ô tô trên đường, chuyển động của thang máy trong khoang thang máy, chúng ta có thể coi trái đất, ô tô, thang máy là chất điểm.

Cơ hệ là tập hợp các khâu được liên kết với nhau sao cho chuyển động của mỗi khâu đều có ảnh hưởng và chịu ảnh hưởng bởi chuyển động của những khâu còn lại. Một số ví dụ về cơ hệ:

- *Mọi vật rắn có thể xem là cơ hệ*, trong đó mỗi điểm vật chất được coi là một chất điểm. Khoảng cách giữa hai chất điểm bất kỳ của vật rắn hoặc không thay đổi theo thời gian, hoặc thay đổi theo qui luật do các tác động bên ngoài quiết định.

- *Các hành tinh trong hệ mặt trời tạo thành một cơ hệ*. Lực hấp dẫn giữa các hành tinh đã khiến cho vị trí và chuyển động của chúng phụ thuộc vào nhau.

- *Các khâu khác nhau trong mỗi cỗ máy cụ thể tạo thành một cơ hệ*, trong đó chuyển động của khâu này luôn ảnh hưởng và chịu ảnh hưởng bởi chuyển động của các khâu khác.

Hệ nhiều vật (Multibody System - MBS) là một cơ hệ gồm nhiều vật rắn (vật rắn tuyệt đối hoặc vật rắn biến dạng) có liên kết với nhau bằng khớp chuyển động (lò xo, giảm chấn, tựa …). Các loại máy, cơ cấu, ô tô, máy bay, tàu thủy, các loại robot, … đều là những hệ nhiều vật.

Các vật rắn trong hệ nhiều vật có thể là vật rắn tuyệt đối hay vật rắn biến dạng. Trong phạm vi giáo trình này, chúng ta chỉ xét hệ nhiều vật trong đó mọi vật đều là vật rắn tuyệt đối. Vật rắn trong hệ nhiều vật gọi là một hệ con (hoặc các phần tử, kết cấu con) có thể có hình dáng,

cấu trúc tùy ý mà từ nay về sau, để đơn giản trong cách gọi tên, ta sẽ gọi là vật.

Các vật trong hệ nhiều vật có thể chuyển động tịnh tiến hoặc quay, tất nhiên những chuyển động này không hoàn toàn tùy ý do nó là một phần tử nằm trong cơ hệ chịu liên kết. Ngoài ra, các vật trong hệ có thể vừa chuyển động tịnh tiến vừa chuyển động quay (chuyển động phức tạp).

Trong giáo trình chỉ xét các loại cơ hệ gồm các chất điểm hoặc vật rắn chịu liên kết giữ, dừng, lý tưởng. Các cơ hệ gồm các vật rắn biến dạng đàn hồi không xét ở đây.

1.1.2. Động lực học hệ nhiều vật giải quiết vấn đề gì?

Môn "***Động lực học hệ nhiều vật***" khảo sát các mối quan hệ động học, động lực học của các vật trong hệ nhiều vật. Các thông số hình học gồm kích thước hình học các vật. Các thông số động học là vị trí (tọa độ Đề-các, góc), vận tốc (vận tốc dài, vận tốc góc), gia tốc (gia tốc dài, gia tốc góc). Các thông số động lực học gồm: khối lượng, hệ số độ cứng, hệ số cản, ten xơ quán tính, lực, mômen.

Quá trình mô hình hóa từng bước một hệ nhiều vật thường bao gồm các công việc sau:

- Mô hình vật lý thực của hệ nhiều vật.
- Mô hình hình học của hệ nhiều vật.
- Mô hình cơ học của hệ nhiều vật (các mô hình động học, động lực học).
- Mô hình toán học của hệ nhiều vật (các phương trình động học, phương trình liên kết, phương trình động lực học).

1.1.3. Cách tiếp cận bài toán động lực học hệ nhiều vật

Có nhiều cách tiếp cận nghiên cứu bài toán động lực học hệ nhiều vật, mỗi cách tiếp cận có những ưu, nhược điểm và khả năng vận dụng cho các trường hợp khác nhau. Về mặt toán học, nhìn chung có các cách tiếp cận như sau:

- Phương pháp véctơ hình học.

- Phương pháp giải tích.

- Phương pháp véctơ đại số.

1.1.4. Ứng dụng của động lực học hệ nhiều vật

Chúng ta nghiên cứu bài toán động lực học hệ nhiều vật để:

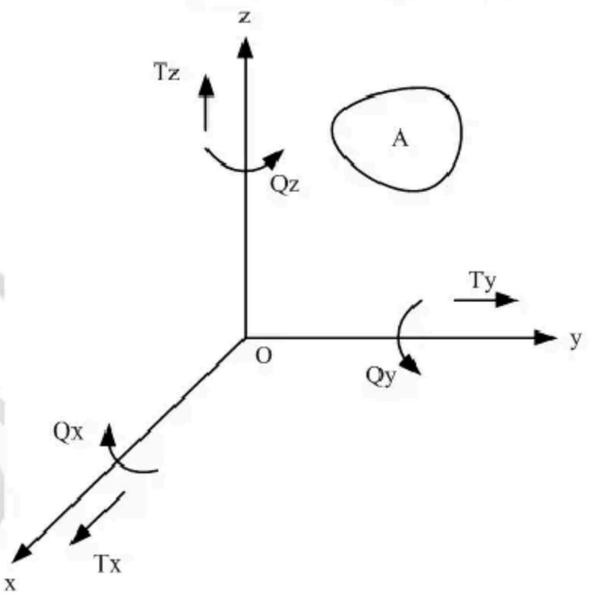
- Ứng dụng cho tính toán thiết kế các cơ cấu máy: Tính các phản lực tại khớp, tính chọn các thiết bị. Tính các lực tác dụng, thiết kế, kiểm bền các khâu, các chi tiết máy. Tính công suất của hệ thống dẫn động…

- Ứng dụng mô phỏng chuyển động của các hệ nhiều vật.

- Ứng dụng thiết kế bộ điều khiển động học, động lực học các hệ nhiều vật.

1.2. NHỮNG KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1.2.1. Số bậc tự do



Hình 1.1. Sáu khả năng chuyển động độc lập của vật rắn

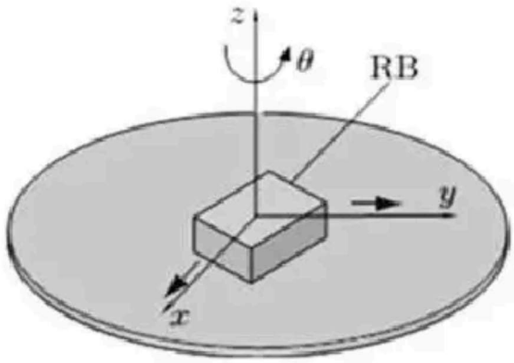
Một vật rắn tự do trong không gian được xác định bởi hệ trục tọa độ *Oxyz* luôn có thể thực hiện được sáu khả năng chuyển động độc lập, bao gồm

ba khả năng chuyển động tịnh tiến *Tx, Ty, Tz* dọc theo ba trục tọa độ và ba khả năng chuyển động quay *Qx, Qy, Qz* quanh ba trục tọa độ (Hình 1.1). Chuyển động quay là một chuyển động mà vật có một điểm cố định (tâm quay) và tất cả các điểm còn lại của vật chuyển động quanh điểm cố định đó với quỹ đạo là cung tròn. Chuyển động tịnh tiến là chuyển động trong đó đường nối hai điểm bất kỳ của vật luôn song song với chính nó. Sáu khả năng chuyển động độc lập này được gọi là sáu *bậc tự do* của vật rắn. Theo thông lệ quốc tế, số bậc tự do của vật rắn được ký hiệu là DOF (Degree of Fredom).

Cần lưu ý rằng, mọi chuyển động tịnh tiến dọc theo một trục có phương bất kỳ đều có thể được biểu diễn một cách duy nhất qua ba thành phần *Tx, Ty, Tz* dưới dạng một tổ hợp tuyến tính. Tương tự, mọi chuyển động quay quanh trục có phương bất kỳ đều là tổ hợp tuyến tính duy nhất của ba chuyển động quay *Qx, Qy, Qz* ở trên. Ngoài ra, bằng cách gắn lên các vật rắn những hệ trục tọa độ tương ứng chúng ta cũng nhận được sáu dạng chuyển động tương đối (6 bậc tự do) giữa hai vật rắn bất kỳ theo cách hoàn toàn tương tự.

Nếu vật rắn có một điểm cố định thì chỉ có ba bậc tự do ứng với ba chuyển động quay quanh ba trục đi qua điểm cố định. Vật rắn có hai điểm cố định thì có một bậc tự do ứng với chuyển động quay quanh trục đi qua hai điểm cố định đó.

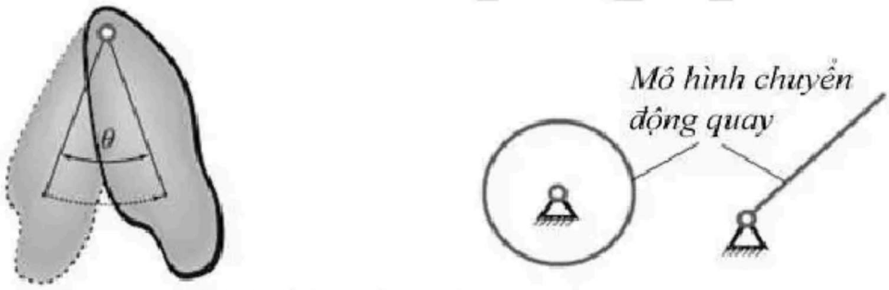
Một vật rắn chuyển động phẳng có tối đa ba bậc tự do (DOF = 3): tịnh tiến dọc theo trục x (Tx), tịnh tiến dọc theo trục y (Ty), quay góc θ quanh trục z (Qz) (Hình 1.2).



Hình 1.2. Vật rắn chuyển động phẳng

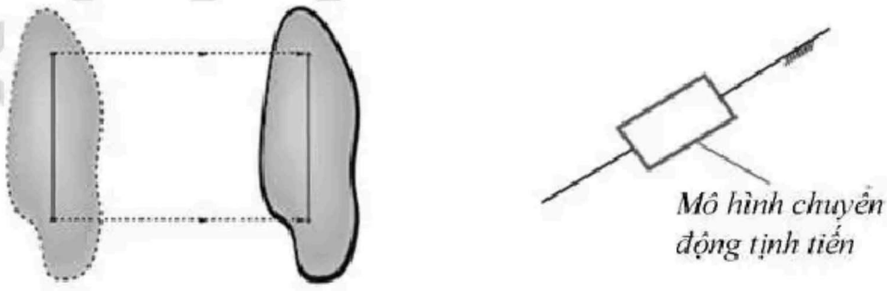
Xét số bậc tự do của vật rắn trong các trường hợp chuyển động phẳng:

Chuyển động quay (Hình 1.3): DOF = 1.



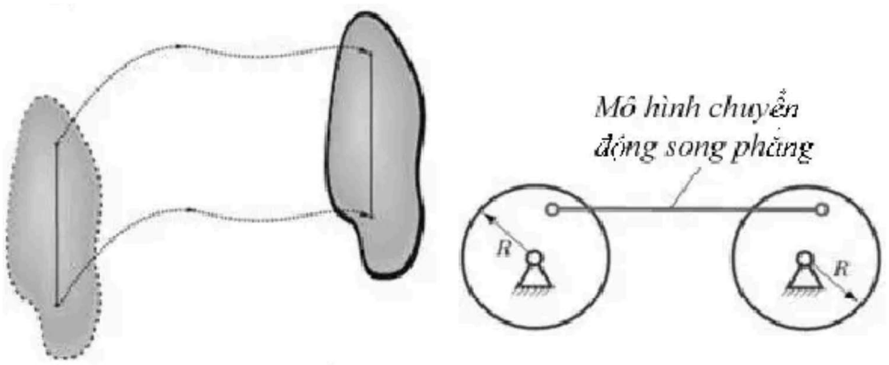
Hình 1.3. Mô hình vật rắn chuyển động quay

Chuyển động tịnh tiến (Hình 1.4): DOF = 1



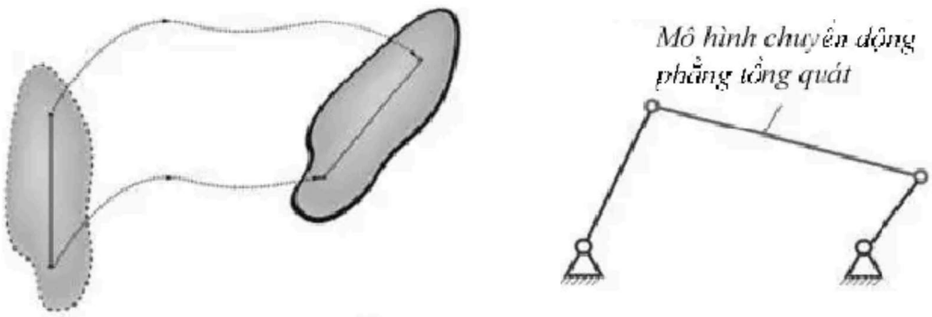
Hình 1.4. Mô hình vật rắn chuyển động tịnh tiến

Chuyển động song phẳng (Hình 1.5): DOF = 2



Hình 1.5. Mô hình vật rắn chuyển động song phẳng

Chuyển động phẳng tổng quát (Hình 1.6): DOF = 3



Hình 1.6. Mô hình vật rắn chuyển động phẳng tổng quát

Bậc tự do của hệ nhiều vật là số chuyển động độc lập của các vật thuộc hệ đối với hệ qui chiếu gắn cứng với giá của nó.

Trên đây là định nghĩa xuất phát về bậc tự do của cơ hệ nói chung, ngoài ra có thể định nghĩa bậc tự do của hệ nhiều vật là số thông số hình học độc lập để xác định hoàn toàn vị trí của các vật thuộc hệ đối với hệ qui chiếu gắn cứng với giá của nó.

Đối với hệ nhiều vật có chuyển động không gian, công thức tính số bậc tự do là:

$$W = 6n - \left(c_1 + 2c_2 + 3c_3 + 4c_4 + 5c_5\right) + R + R' \qquad (1.1)$$

Trong đó:

n – số vật chuyển động của hệ nhiều vật (có vai trò như khâu động).

c_k – số khớp loại k ($k = 1 \div 5$).

R – số ràng buộc trùng (chỉ xuất hiện trong các hệ nhiều vật chuyển động không gian và có cấu trúc khép kín).

R' – số ràng buộc thừa hay liên kết thừa.

Đối với hệ nhiều vật chuyển động phẳng, công thức tính số bậc tự do là:

$$W = 3n - (c_4 + 2c_5) + R' \qquad (1.2)$$

1.2.2. Liên kết

a) Khâu

Khâu là khái niệm kỹ thuật dùng để chỉ nhưng bộ phận trong máy móc có chuyển động riêng biệt nếu xét về mặt nguyên lý. Trên thực tế, các khâu có thể tồn tại dưới nhiều dạng khác nhau.

- *Dạng không biến hình* (xem như vật rắn tuyệt đối): Ở dạng này các khâu thường bao gồm nhiều chi tiết máy khác nhau được lắp ráp thành một thể thống nhất mà giữa các bộ phận hợp thành không bắt buộc phải có chuyển động tương đối (cho dù trên thực tế các chuyển động tương đối có thể vẫn tồn tại). Piston, thanh truyền, trục khuỷu của động cơ đốt trong hay các bánh xe của xe đạp là những khâu thuộc loại này. Những khâu tồn tại với tư cách vật rắn tuyệt đối được gọi là những khâu thông thường.

- *Dạng biến hình*: Đây là khâu mà trạng thái biến dạng diễn ra thường xuyên trong quá trình làm việc, thậm chí ngay cả trong điều kiện bình thường. Dây đai của bộ truyền động đai, dây xích của bộ truyền động xích, hay các loại dây phanh là những khâu kiểu như vậy.

- *Các khối chất lỏng hay chất khí*: Đây là các loại khâu tồn tại trong các hệ truyền động thủy khí. Ở đó, việc truyền chuyển động và công suất được thực hiện nhờ sự di chuyển của các khối chất lỏng hay chất khí bên trong các thiết bị của hệ thống thủy lực (như các đường ống dẫn, các bơm hoặc các động cơ, cặp piston-xilanh).

Các khâu biến hình và các khâu có dạng khối lỏng hay chất khí là những khâu đặc biệt. Động lực học hệ nhiều vật chỉ khảo sát những khâu thuộc loại thông thường. Theo đó, khái niệm khâu ở đây cũng đồng nhất với

khái niệm vật rắn tuyệt đối. Mỗi khâu được biểu diễn bằng một hình vẽ đơn giản tương ứng với nó gọi là lược đồ khâu.

b) Phân loại liên kết

Liên kết là tất cả mọi hình thức khống chế hoặc áp đặt điều kiện lên chuyển động của các vật rắn trong không gian. Ví dụ như cánh cửa lắp trên khuôn cửa, vật nặng treo trên dây, chiếc hộp nằm trên mặt bàn.

Liên kết bao giờ cũng liên quan đến hai đối tượng là vật tạo liên kết và vật chịu liên kết. Hai vật này gọi chung là hai vật liên kết. Trong ba ví dụ đưa trên thì khuôn cửa, dây treo, bàn là vật tạo liên kết, còn cánh cửa, vật nặng, chiếc hộp là vật chịu kiên kết.

Tuy nhiên, nếu hiểu một cách chính xác hơn thì trong hai đối tượng được nói tới, vật khảo sát là vật chịu liên kết, vật còn lại là vật tạo liên kết (nói đơn giản là liên kết). Theo đó, bất cứ vật nào trong liên kết đều có thể là vật tạo liên kết trong trường hợp này và là vật chịu liên kết trong trường hợp khác.

Trong cơ học, người ta phân biệt các loại liên kết như sau:

- Liên kết cố định là liên kết giữa hai vật liên kết không còn bất cứ khả năng chuyển động tương đối nào. Thanh thép được hàn cứng vào khung thép hay được chôn chặt vào tường làm giá treo là thí dụ tiêu biểu về liên kết cố định. Liên kết cố định hay còn được gọi là liên kết ngàm hay ngàm chặt.

- Liên kết động là liên kết mà giữa hai vật liên kết tồn tại ít nhất một khả năng chuyển động tương đối. Liên kết giữa cánh cửa và khuôn cửa, giữa piston và xilanh của động cơ đốt trong là những liên kết động.

- Liên kết hình học là liên kết được hình thành do sự tiếp xúc trực tiếp thông qua các yếu tố hình học (điểm, đường, mặt) của vật tao liên kết và vật chịu liên kết: liên kết giữa mặt bàn và hộp để trên bàn, liên kết giữa hai bánh răng ăn khớp là các liên kết hình học.

- Liên kết lực là liên kết trong đó chuyển động hay vị trí tương đối giữa các vật liên kết bị khống chế bởi một hay một số lực nhất định. Chẳng hạn, lực hấp dẫn giữa các hành tinh trong hệ mặt trời là yếu tố tạo nên liên kết lực giữa chúng.

- Liên kết hôlônôm là loại liên kết áp đặt điều kiện lên chuyển vị tương đối giữa các vật, cũng có thể áp đặt điều kiện lên vận tốc tương đối giữa các vật nhưng có thể tích phân được để nhận được điều kiện về chuyển vị. Hầu hết các liên kết hình học thực tế đều là liên kết hôlônôm.

- Liên kết phi hôlônôm là liên kết áp đặt điều kiện lên vận tốc tương đối giữa các vật nhưng không thể tích phân được điều kiện này để nhận được điều kiện về chuyển vị. Liên kết giữa các vật nối với nhau bằng một giảm chấn trong trường hợp tổng quát thường được coi là liên kết phi hôlônôm.

c) Cặp động học

Nối động là tất cả các giải pháp kỹ thuật dùng để liên kết các khâu hoặc các vật rắn với nhau, nhằm hạn chế bớt một số khả năng chuyển động tương đối giữa chúng, nhờ đó mà có thể tạo thành các cơ cấu có chuyển động xác định. Có hai cách nối động: nối động trực tiếp và nối động gián tiếp.

Trong phép nối động trực tiếp, các khâu cần ghép nối tiếp xúc trực tiếp với nhau. Sự tiếp xúc giữa các khâu trong ghép nối trực tiếp có thể diễn ra theo điểm, theo đường hoặc theo mặt, gọi là các yếu tố hình học của sự tiếp xúc.

Ngược lại, trong phép nối động gián tiếp, các khâu cần nối động không tiếp xúc trực tiếp với nhau, hoặc không hoàn toàn tiếp xúc trực tiếp với nhau, mà thông thường qua một (một số) khâu trung gian, hay thông qua môi trường trung gian.

Tập hợp các yếu tố hình học trong sự tiếp xúc giữa các khâu của phép nối động trực tiếp giữa hai khâu bất kỳ được gọi là khớp động. Mỗi yếu tố hình học trong sự tiếp xúc giữa hai khâu và nằm trên từng khâu riêng biệt được gọi là thành phần khớp động. Lưu ý rằng khái niệm khớp động chỉ liên quan tới các phép nối động trực tiếp. Ngoài ra, các yếu tố hình học tạo nên khớp động (điểm, đường, mặt) nằm trên cả hai khâu được nối động (gọi là hai khâu tạo khớp).

Các liên kết là thành phần cơ bản của một hệ nhiều vật. Liên kết trong hệ nhiều vật là chỉ sự nối ghép cơ học giữa hai vật rắn. Hai vật rắn có liên kết với nhau tạo thành một *cặp động học*. Liên kết được gọi là khớp động (*joint*), hai vật rắn được gọi là khâu (*link*).

Khi hai vật rắn nối ghép với nhau bằng một khớp động, tùy theo kết cấu của khớp một số chuyển động tương đối giữa chúng sẽ bị hạn chế. Số chuyển động tương đối giữa hai vật rắn bị hạn chế do nối khớp với nhau được gọi là số ràng buộc của khớp động.

Lý thuyết cơ cấu chia các khớp động theo hai cách chủ yếu:

- Theo yếu tố hình học của sự tiếp xúc, các khớp động được chia thành hai loại là khớp bậc cao vào khớp bậc thấp. Khớp bậc cao là khớp trong đó có hai khâu tạo khớp tiếp xúc trực tiếp với nhau theo điểm hoặc đường. Khớp bậc thấp là khớp trong đó các khâu tạo khớp tiếp xúc trực tiếp với nhau theo mặt.

- Theo số bậc tự do bị hạn chế, các khớp động được chia thành năm nhóm gồm khớp loại 1, khớp loại 2, khớp loại 3, khớp loại 4, khớp loại 5. Khớp loại k (k=1÷5) là khớp mà giữa hai khâu tạo ra nó bị hạn chế k khả năng chuyển động tương đối, chỉ còn lại (6-k) khả năng chuyển động tương đối độc lập. Việc phân loại khớp theo số bậc tự do bị hạn chế có ý nghĩa rất lớn đối với việc thành lập công thức tính bậc tự do của cơ cấu.

Số bậc tự do của khớp động được tính theo công thức:

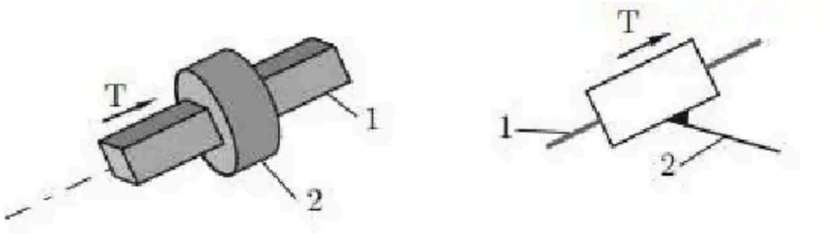
$$M = 6 - k \qquad (1.3)$$

Trong đó k – số ràng buộc chuyển động của khớp động, M – số bậc tự do của khớp động.

Sau đây sẽ giới thiệu một số loại khớp động thông dụng:

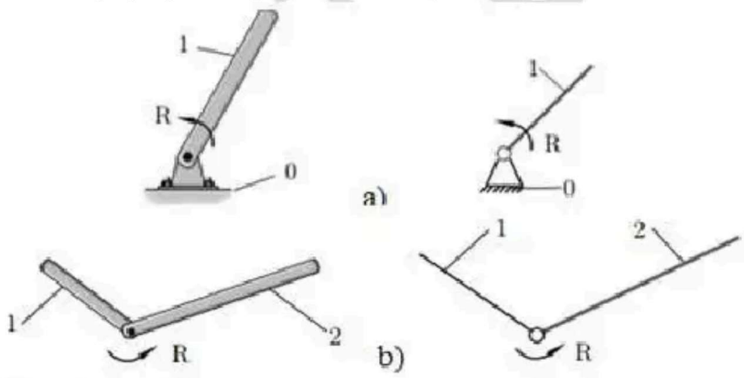
- Khớp tịnh tiến (Hình 1.7): Khớp tịnh tiến hạn chế năm khả năng chuyển động tương đối giữa hai khâu tạo ra nó, chỉ để lại một thành phần chuyển động tịnh tiến dọc theo một trục xác định. Khớp tạo bởi cặp piston –xilanh của động cơ đốt trong sau khi đã lắp thanh truyền thanh truyền với piston và trục khuỷu, khớp tạo bởi ụ động vào băng trượt của máy tiện

là các ví dụ tiêu biểu của khớp tịnh tiến. Khớp tịnh tiến là khớp thấp loại 5: *M = 1*.



Hình 1.7. Khớp tịnh tiến

- Khớp quay (Hình 1.8): Khớp quay (còn gọi là khớp bản lề) hạn chế năm khả năng chuyển động tương đối giữa hai khâu tạo ra nó, chỉ để lại một thành phần chuyển động quay tương đối quanh một trục xác định. Các khớp tạo bởi cánh cửa với khuôn cửa, thanh truyền với trục khuỷu là những thí dụ tiêu biểu về khớp quay. Khớp quay là khớp thấp loại 5: *M = 1*.



Hình 1.8. Khớp quay

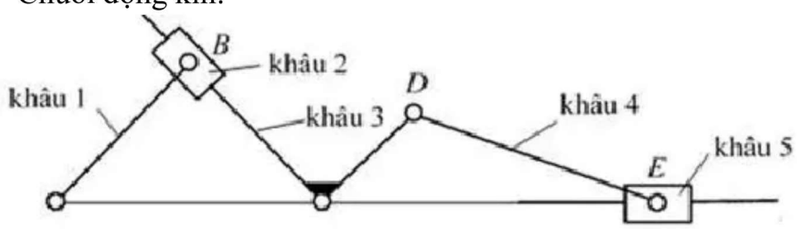
d) Chuỗi động

Chuỗi động là sản phẩm thu được khi nối hai hay nhiều khâu với nhau bằng các khớp động. Trong chuỗi động, giữa hai khâu bất kỳ đều được liên hệ với nhau thông qua các phép nối động trực tiếp hoặc gián tiếp. Một hệ nhiều vật liên kết với nhau bằng các khớp động được gọi là một *chuỗi động*. Nói cách khác *chuỗi động* là một hệ nhiều vật chịu liên kết.

Chuỗi động được biểu diễn thông qua lược đồ động của các khâu. Đó là hình biểu diễn đơn giản của khâu mà trên đó thể hiện đầy đủ số khớp, loại khớp và phân bố của chúng.

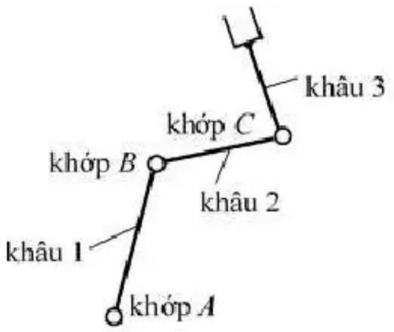
Các chuỗi động được phân chia thành ba loại:

- Chuỗi động kín:



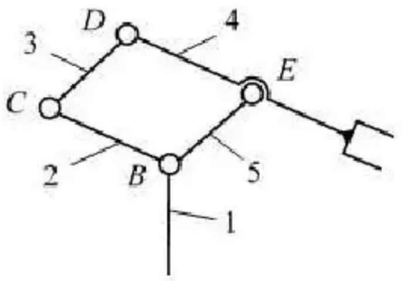
Hình 1.9. Mô hình chuỗi động kín

- Chuỗi động hở:



Hình 1.10. Mô hình chuỗi động hở

- Chuỗi động tổng hợp:



Hình 1.9. Mô hình chuỗi động tổng hợp

e) Cơ cấu

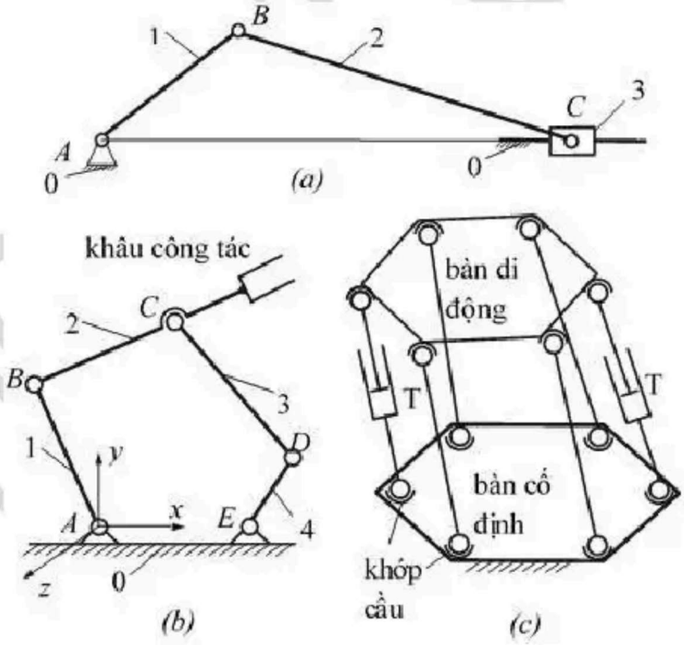
Cơ cấu là một chuỗi động có một khâu được xem là cố định, các khâu còn lại có dạng chuyển động hoàn toàn xác định so với khâu được xem là cố định. Khâu cố định trong cơ cấu được gọi là giá. Giá là khâu duy nhất và luôn tồn tại trong tất cả các cơ cấu. Mô hình cơ cấu được thể hiện trên hình 1.12.

Một số đặc điểm của cơ cấu:

- Cơ cấu bao giờ cũng là sản phẩm của con người, còn cơ hệ có thể là sản phẩm của tự nhiên.

- Cơ cấu được hình thành là để truyền và biến đổi chuyển động. Khả năng có thể chuyển động và chuyển động được một cách xác định trong mọi hệ qui chiếu luôn là yêu cầu bắt buộc đối với mọi cơ cấu. Trong khi đó yêu cầu về chuyển động không phải là bắt buộc với mọi cơ hệ.

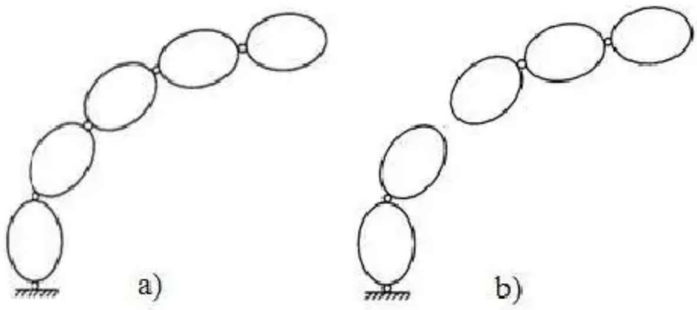
- Đối tượng cấu thành nhỏ nhất được quan tâm trong cơ cấu là khâu, không phải là chất điểm.



Hình 1.10. Mô hình cơ cấu

a. Tay quay-con trượt, b. Robot song song, c. Robot hexapod

1.2.3. Các loại khớp động trong hệ nhiều vật



Hình 1.11. Mô hình hệ nhiều vật

a. Hệ nhiều vật có liên kết, b. Hệ nhiều vật không có liên kết

a) Khớp động và bậc tự do của khớp động

Mỗi vật rắn tự do chuyển động trong không gian có 6 bậc tự do. Nếu hai vật rắn không có liên kết với nhau, giữa chúng sẽ có 6 chuyển động tương đối. Khi hai vật rắn liên kết với nhau bằng một khớp động, tùy theo kết cấu của khớp một số chuyển động tương đối giữa chúng sẽ bị cản trở. Số chuyển động tương đối giữa hai vật rắn bị hạn chế do nối khớp với nhau được gọi là số ràng buộc của khớp động. Trên cơ sở khái niệm số ràng buộc chuyển động tương đối giữa hai khâu nối khớp ta đưa ra công thức định nghĩa số bậc tự do của khớp động như sau:

$$f_{Ji} = 6 - r_i \qquad (1.4)$$

Trong đó r_i là số ràng buộc chuyển động của khớp thứ i còn f_{Ji} là bậc tự do của khớp thứ i.

Thí dụ khớp động một bậc tự do là khớp nối hai vật rắn, chúng chỉ có thể thực hiện một chuyển động quay tương đối (hoặc chuyển động tịnh tiến tương đối) đối vối nhau.

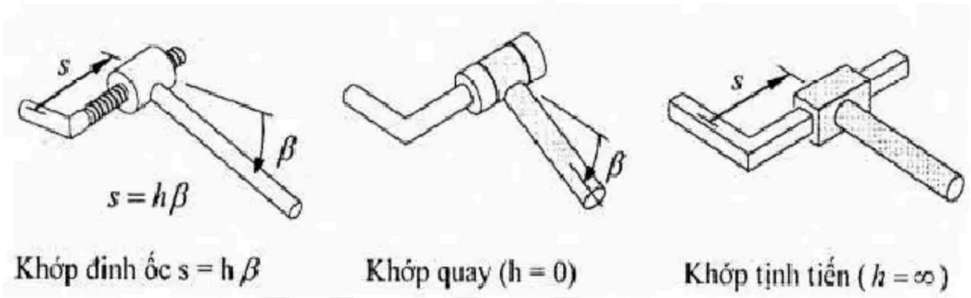
b) Sự phân loại các khớp động trong lý thuyết cơ cấu

Như ta đã biết, trong lý thuyết cơ cấu người ta phân loại các khớp thành các khớp bậc thấp (lower pais) hoặc còn gọi là các khớp chuẩn và các khớp bậc cao (higher pais) hoặc các khớp phức tạp.

- Khớp bậc thấp: Các khớp bậc thấp là các khớp có tiếp xúc mặt. Người ta phân ra sáu loại khớp bậc thấp (khớp chuẩn) như sau :

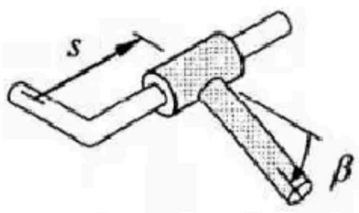
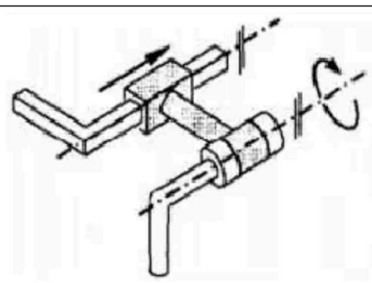
Bảng 1.1. Các loại khớp bậc thấp

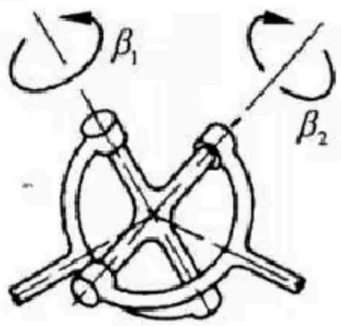
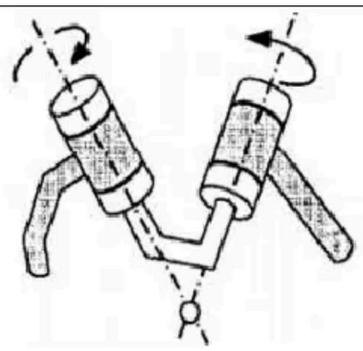
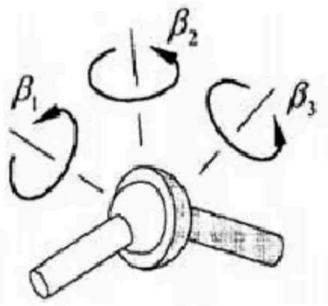
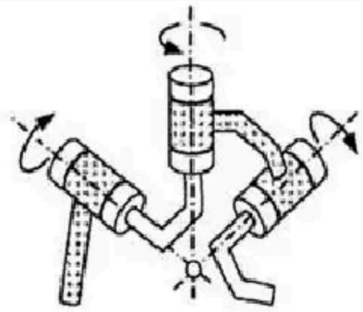
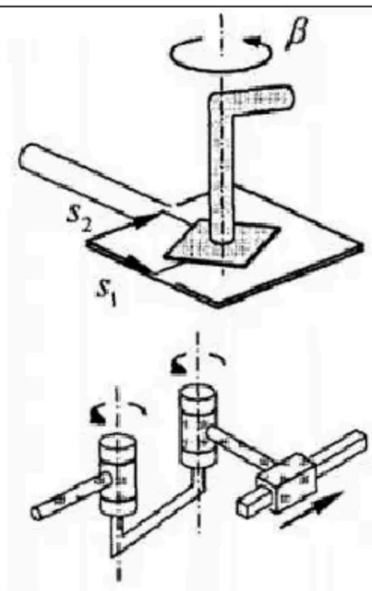
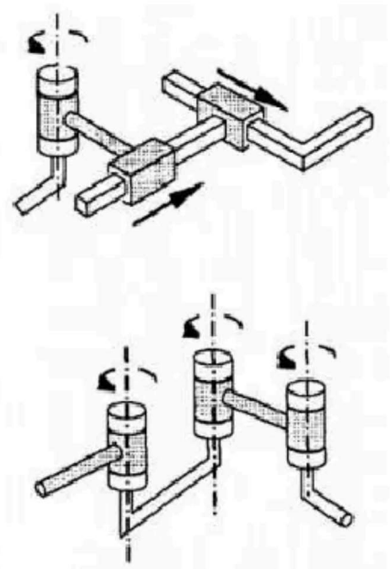
Tên khớp		Mặt tiếp xúc
Khớp quay	(R)	Mặt tròn xoay
Khớp tinh tiến	(P)	Mặt bao của hình lăng trụ
Khớp trụ	(C)	Mặt bao hình trụ
Khớp cầu	(S)	Mặt cầu
Khớp phẳng	(E)	Mặt phẳng



Khớp đinh ốc s = h β Khớp quay (h = 0) Khớp tịnh tiến ($h = \infty$)

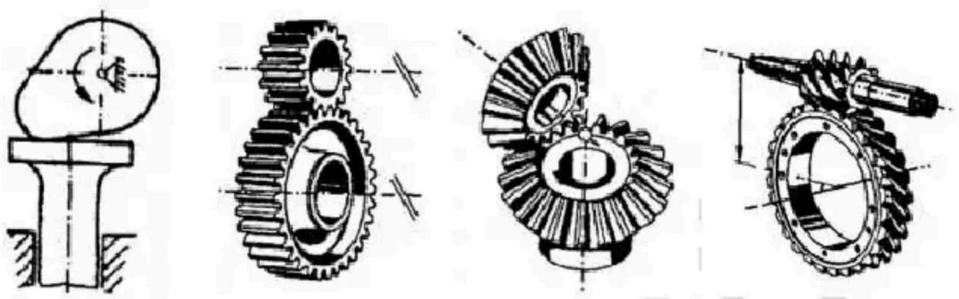
Hình 1.12. Các khớp có bậc tự do bằng một

Khớp trụ $f_j = 2$		

Khớp Cardan $f_J = 2$		
Khớp cầu $f_J = 3$		
Khớp phẳng $f_J = 3$		

Hình 1.13. Các khớp có bậc tự do lớn hơn một

- Khớp bậc cao: Các khớp bậc cao (hoặc còn gọi là các khớp phức hợp) là các khớp tiếp xúc đường hoặc điểm.



Hình 1.14. Một số cơ cấu có khớp bậc cao

1.2.4. Bậc tự do và các tọa độ suy rộng của hệ nhiều vật

a) Số bậc tự do của một cơ cấu

Xét một cơ cấu không gian bất kỳ, ký hiệu:

p: số lượng các khâu động của cơ cấu (không kể khâu cố định),

n_J: số lượng các khớp trong cơ cấu,

f_{Ji}: bậc tự do của khớp động thứ i.

Định lý Grubler: Số bậc tự do của một cơ cấu không gian gồm p khâu động và n_J khớp động có các bậc tự do tương ứng là f_{Ji} $(i = 1,2,...,n_J)$ được xác định bởi công thức:

$$f = 6(p - n_J) + \sum_{i=1}^{n_J} f_{Ji} - f_{th} \qquad (0.5)$$

Trong đó f_{th} là số bậc tự do thừa của cơ cấu.

Tồn tại các trường hợp như sau:

$f \geq 1$: cơ cấu (cơ hệ có ràng buộc),

$f = 0$: kết cấu tĩnh định,

$f < 0$: kết cấu siêu tĩnh.

b) Các toạ độ suy rộng

Khái niệm toạ độ suy rộng: Vị trí của một hình phẳng (vật rắn phẳng) được xác định bởi ba toạ độ, vị trí của một vật rắn không gian được xác định

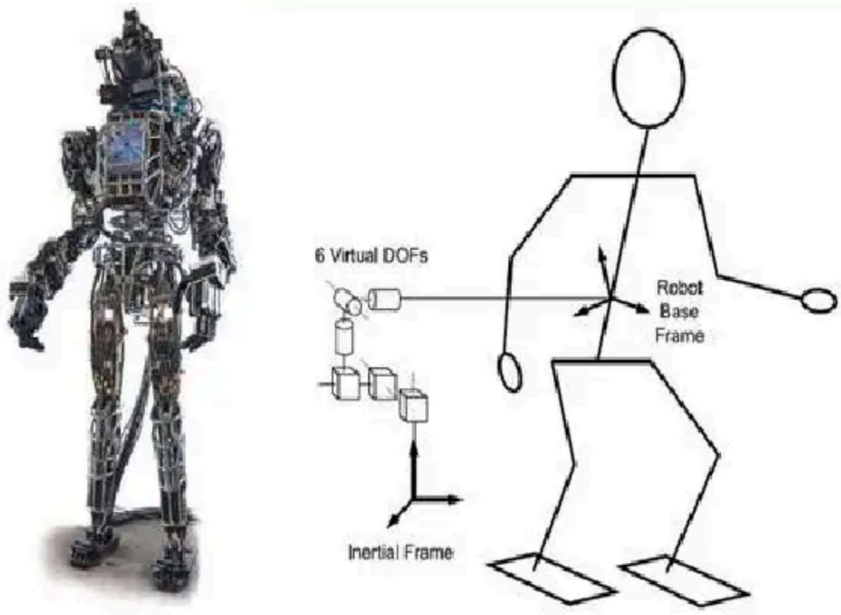
bởi sáu toạ độ. Nếu một hệ nhiều vật gồm p vật rắn không gian và giữa chúng có r điều kiện ràng buộc hình học (và giả thiết hệ chỉ có ràng buộc hình học) thì số bậc tự do của hệ là $f = 6p - r$. Để xác định vị trí của một hệ nhiều vật đối với một hệ qui chiếu nào đó ta cần phải sử dụng các tham số định vị. Các tham số dùng để xác định vị trí của một hệ nhiều vật đối với một hệ qui chiếu được gọi là các toạ độ suy rộng.

Thông thường các toạ độ suy rộng là các góc quay hoặc các độ dài. Có nhiều cách khác nhau chọn các toạ độ suy rộng. Có các toạ độ suy rộng đủ và các toạ độ suy rộng có dư. Số toạ độ suy rộng độc lập ít nhất đủ để xác định vị trí của một hệ hôlônôm được gọi là các toạ độ suy rộng đủ. Trong trường hợp như vậy, đối với hệ hôlônôm số các toạ độ suy rộng đủ bằng số bậc tự do của hệ nhiều vật.

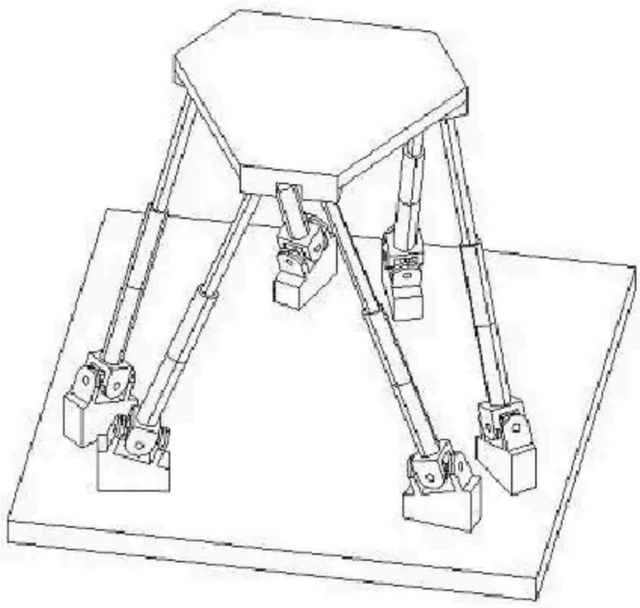
1.2.5. Phân loại các hệ nhiều vật theo cấu trúc

a) Sự phân loại theo tôpô

Về phương diện tôpô, phân chia hệ nhiều vật chịu liên kết (chuỗi động) thành hai loại: Hệ nhiều vật có cấu trúc cây (các chuỗi động hở) và hệ nhiều vật có cấu trúc mạch vòng (các chuỗi động kín).



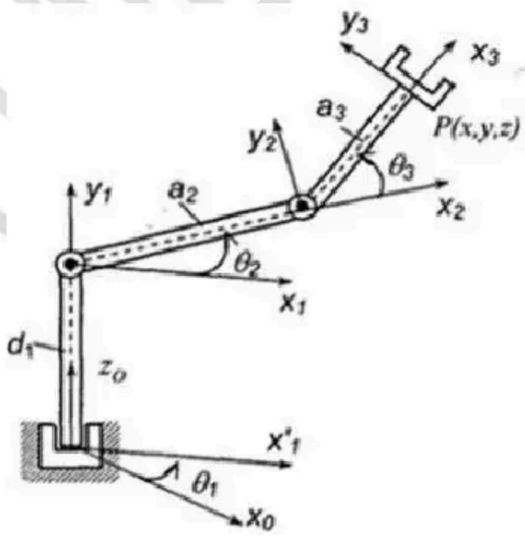
Hình 1.15. Hệ nhiều vật có cấu trúc cây



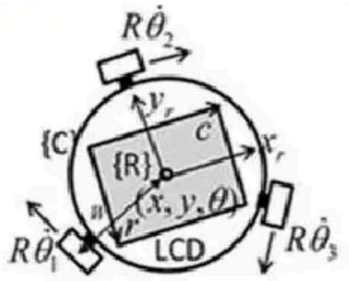
Hình 1.16. Hệ nhiều vật có cấu trúc mạch vòng

b) Phân loại theo cơ học

Hệ nhiều vật hôlônôm và phi hôlônôm:

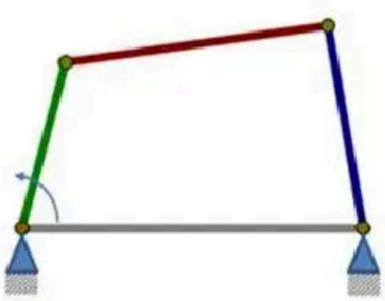


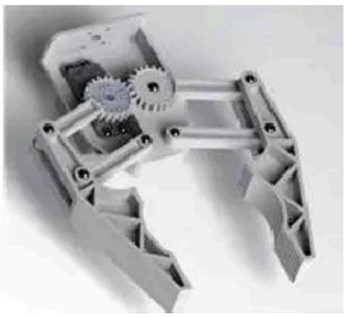
Hình 1.17. Hệ nhiều vật hônônôm



Hình 1.18. Hệ nhiều vật phi hônônôm

c) Phân loại khác





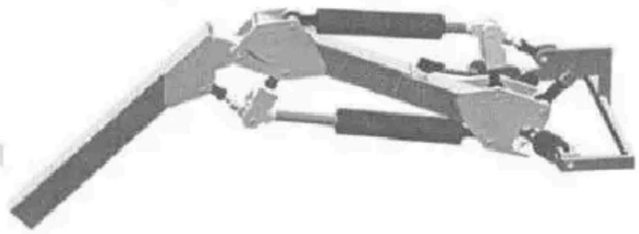
Hình 1.19. Chuỗi động phẳng

- Chuỗi động phẳng: Nếu tất cả các điểm của các vật thể tạo thành chuỗi động đều chuyển động song song với một mặt phẳng qui chiếu thì chuỗi động được gọi là chuỗi động phẳng. Các chuyển động tương đối của các vật thể tại các khớp động hoặc là chuyển động tịnh tiến hoặc là chuyển động quay quanh một trục vuông góc với mặt phẳng qui chiếu.

- Chuỗi động cầu: Ở các chuỗi động cầu: quỹ đạo của mỗi điểm của một vật thể nằm trên một mặt cầu xác định nào đó có tâm là điểm cố định. Mỗi vật thể trong chuỗi động cầu thực hiện ba chuyển động quay quanh các trục giao nhau và không thực hiện chuyển động tịnh tiến.

Hình 1.20. Chuỗi động cầu

- Chuỗi động không gian: Ở các chuỗi động không gian, các vật thể có thể thực hiện các chuyển động không gian tổng quát, bao gồm ba chuyển động quay quanh các trục giao nhau và ba chuyển động tịnh tiến. Chuyển động tương đối của các vật thể ở các khớp động trong trường hợp tổng quát là các chuyến động không gian.



Hình 1.21. Chuỗi động không gian

1.3. CÔNG CỤ TOÁN HỌC PHÂN TÍCH ĐỘNG LỰC HỌC HỆ NHIỀU VẬT

1.3.1. Ma trân

a) Định nghĩa

Cho *m* và *n* là hai số nguyên dương. Một bảng chữ nhật gồm các phần tử a_{ij} được sắp xếp thành *m* hàng và *n* cột được gọi là một ma trận cỡ $m \times n$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

Phần tử a_{ij} là phần tử ở hàng thứ i và cột thứ j của ma trận **A**. Các phần tử a_{ij} có thể là các hằng số hoặc các hàm. Đặc biệt các phần tử của một ma trận cũng có thể là các ma trận. Ma trận có các phần tử là các ma trận được gọi là ma trận khối.

b) Ma trận chuyển vị

Ma trận chuyển vị của ma trận **A**, ký hiệu là $\mathbf{A}^T$, là ma trận nhận được từ ma trận **A** bằng cách chuyển hàng thành cột:

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1.7}$$

c) Ma trận cột và ma trận hàng

Ma trận cột là ma trận cỡ $m \times 1$:

$$\mathbf{a}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} = \left[a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj} \right]^T \tag{1.8}$$

Ma trận hàng là ma trận cỡ $1 \times n$:

$$\mathbf{b}_i = \left[a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in} \right] \tag{1.9}$$

Với các khái niệm ma trận cột và ma trận hàng ở trên, ma trận **A** cỡ $m \times n$ có thể biểu diễn dưới dạng:

$$\mathbf{A} = \left[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_m \end{bmatrix} \qquad (1.10)$$

Để làm quen với cách viết ma trận dạng trên ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 1.1: Cho ma trận cỡ 2×3:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Các ma trận cột của ma trận **A** là:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Các ma trận hàng của ma trận **A** là:

$$\mathbf{b}_1 = \left[1,\ 2,\ 0\right], \quad \mathbf{b}_2 = \left[2,\ 3,\ 1\right]$$

Khi đó ma trận **A** có thể viết dưới dạng:

$$\mathbf{A} = \left[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix}$$

d) Ma trận vuông

Ma trận A có số hàng bằng số cột ($m = n$) được gọi là ma trận vuông. Ma trận vuông cỡ $n \times n$ còn được gọi là ma trận vuông cấp n:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad (1.11)$$

Đường nối từ phần tử a_{11} qua a_{22} đến phần tử a_{nn} được gọi là đường chéo chính của ma trận **A**. Các phần tử a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn} là các phần tử trên đường chéo chính của ma trận **A**.

e) Ma trận đường chéo

DO NOT COPY

Ma trận vuông mà các phần tử của nó nằm ngoài đường chéo chính đều bằng không ($a_{ij} = 0$ khi $i \neq j$) được gọi là ma trận đường chéo:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \text{diag}\left[a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\right] \qquad (1.12)$$

f) Ma trận đơn vị

Ma trận đường chéo mà các phần tử nằm trên đường chéo chính đều bằng 1 được gọi là ma trận đơn vị:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \left[\delta_{ij}\right] \qquad (1.13)$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{khi } i = j \\ 0 & \text{khi } i \neq j \end{cases} \qquad (1.14)$$

g) Ma trận không

Một ma trận mà tất cả các phần tử của nó đều bằng không được gọi là ma trận không:

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \qquad (1.15)$$

h) Định thức của ma trận vuông

Nếu **A** là ma trận vuông cấp *n* với các phần tử là các hằng số (hoặc các hàm số) thì định thức của ma trận **A** là một số (hoặc một hàm số) và được ký hiệu là $\det \mathbf{A}$. Ở đây, ta nêu lên định nghĩa định thức theo qui tắc truy hồi. Trước hết, định nghĩa định thức cấp hai. Sau đó, định nghĩa định thức cấp ba, ..., cấp *n*.

Định thức cấp hai là một sự xắp xếp 2^2 phần tử a_{ij} thành một bảng vuông và gắn cho nó một giá trị (hoặc một hàm số) tính theo công thức:

$$\det \mathbf{A}_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad (1.16)$$

Định thức cấp ba là một sự xắp xếp 3^2 phần tử a_{ij} thành một bảng vuông, gắn cho nó một giá trị (hoặc một hàm số) tính truy hồi theo các định thức cấp hai như sau:

$$\det \mathbf{A}_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \qquad (1.17)$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

Định thức con M_{ij} của phần tử a_{ij} của ma trận vuông **A** là định thức cấp $n-1$ suy ra từ **A** bằng cách bỏ đi hàng thứ *i* và cột thứ *j*. Phần phụ đại số của phần tử a_{ij} của ma trận vuông **A**, ký hiệu là A_{ij}, được định nghĩa bởi công thức sau:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \qquad (1.18)$$

Định thức cấp *n* là một sự xắp xếp n^2 phần tử a_{ij} thành một bảng vuông:

$$\det \mathbf{A} = d_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (1.19)$$

Ta gắn cho nó một giá trị (hoặc một hàm số) tính truy hồi theo các định thức cấp $n-1$ như sau:

$$d_n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \qquad (1.20)$$

Trong biểu thức trên, ta khai triển định thức theo cột thứ *j*, trong đó *j* có thể lấy một trong các số từ *1* cho đến *n*.

Chú ý rằng, nếu **A** là ma trận vuông cấp *n*, ta có các hệ thức:

DO NOT COPY

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^T,$$
$$\det(\alpha \mathbf{A}) = \alpha^n \det \mathbf{A}. \qquad (1.21)$$

i) Phép cộng hai ma trận

Tổng của hai ma trận cùng cỡ $m \times n$ là một ma trận cùng cỡ và được xác định như sau:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}, \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \forall i, j \qquad (1.22)$$

j) Phép nhân ma trân với môt số

Tích của ma trận **A** cỡ $m \times n$ với hằng số α là một ma trận cỡ $m \times n$ và được xác định bởi hệ thức:

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{A} = \mathbf{A}\alpha, \quad c_{ij} = \alpha a_{ij}, \forall i, j \qquad (1.23)$$

k) Phép nhân hai ma trận

Cho **A** là ma trận cỡ $m \times p$, **B** là ma trận cỡ $p \times n$. Tích của hai ma trận **A** và **B** là ma trận **C** cỡ $m \times n$ được xác định bởi công thức sau:

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB}, \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}, \quad (i = 1..m, j = 1..n) \qquad (1.24)$$

Chú ý: Hai ma trận **A** và **B** chỉ có thể nhân với nhau được khi số cột của ma trận **A** bằng số hàng của ma trận **B**. Phép nhân hai ma trận không có tính chất giao hoán nhưng có tính chất kết hợp và tính chất phân phối.

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA} \qquad (1.25)$$
$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C} \qquad (1.26)$$
$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC} \qquad (1.27)$$

Ví dụ 1.2: Cho hai ma trận **A** và **B** có dạng như sau:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix} \qquad (1.28)$$

Hãy kiểm tra tính chất giao hoán.

Giải:

Theo công thức tính tích hai ma trận, ta có:

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}21 & 21 & 21\\ -9 & -9 & -9\\ -12 & -12 & -12\end{bmatrix},\quad \mathbf{BA}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{1.29}$$

Ta thấy $\mathbf{AB}\neq\mathbf{BA}$, vậy phép nhân hai ma trận không có tính chất giao hoán.

Về phép nhân các ma trận, còn có một số hệ thức quan trọng sau:

$$(\mathbf{ABC}\ldots\mathbf{N})^T=\mathbf{N}^T\ldots\mathbf{C}^T\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T \tag{1.30}$$

$$\det(\mathbf{ABC}\ldots\mathbf{N})=\det\mathbf{A}.\det\mathbf{B}.\det\mathbf{C}\ldots\det\mathbf{N} \tag{1.31}$$

l)Ma trận nghịch đảo

Cho **A** là ma trận vuông cấp *n*. Nếu $\det\mathbf{A}\neq 0$ thì sẽ tồn tại một ma trận $\mathbf{A}^{-1}$ mà:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{E} \tag{1.32}$$

Ma trận $\mathbf{A}^{-1}$ được gọi là ma trận nghịch đảo của ma trận $\mathbf{A}$.

Trong đại số tuyến tính người ta thường tính ma trận nghịch đảo theo công thức:

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{\det\mathbf{A}}adj\mathbf{A} \tag{1.33}$$

Trong đó $adj\mathbf{A}$ là ma trận phụ trợ của ma trận **A** và có dạng:

$$adj\mathbf{A}=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{bmatrix} \tag{1.34}$$

Với A_{ij} là các phần phụ đại số của các phần tử a_{ij} của ma trận **A**.

Ta có các đồng nhất thức sau đây về ma trận nghịch đảo:

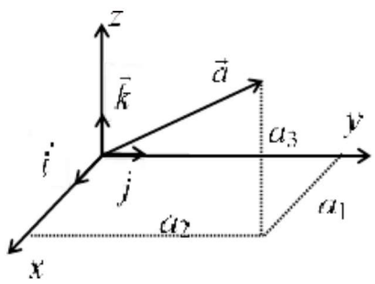
$$(\mathbf{A}^{-1})^T=(\mathbf{A}^T)^{-1} \tag{1.35}$$

$$(\mathbf{ABC}\ldots\mathbf{N})^{-1}=\mathbf{N}^{-1}\ldots\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} \tag{1.36}$$

DO NOT COPY

1.3.2. Véctơ đại số

a) Định nghĩa véctơ đại số



Hình 1.22. Véctơ hình học

Cho véctơ hình học $\vec{a}$ trong không gian ba chiều như hình 1.24. Trong hệ qui chiếu $R=\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$, véctơ $\vec{a}$ có thể biểu diễn dưới dạng:

$$\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k} \qquad (1.37)$$

Ma trận cột có các thành phần là các tọa độ của véctơ hình học $\vec{a}$ trong hệ qui chiếu $R=\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ được gọi là véctơ đại số. Ký hiệu là **a**:

$$\mathbf{a}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}=[a_1,a_2,a_3]^T \qquad (1.38)$$

Các đại lượng a_1,a_2,a_3 được gọi là các toạ độ của véctơ **a** trong hệ qui chiếu *R*.

Nếu ta qui ước:

$$\vec{\mathbf{e}}=\begin{bmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\end{bmatrix}^T \qquad (1.39)$$

Ta gọi là một cơ sở trong không gian ba chiều, thì ta có hệ thức liên hệ giữa vectơ hình học $\vec{a}$ và véctơ đại số **a**:

$$\vec{a}=\mathbf{a}^T\vec{\mathbf{e}} \qquad (1.40)$$

Như thế véctơ hình học không phụ thuộc vào việc chọn hệ qui chiếu, còn véctơ đại số phụ thuộc vào việc chọn hệ qui chiếu. Vì vậy khi cần thiết, ta phải ghi rõ hệ qui chiếu vào góc trên bên trái của véctơ đại số như sau:

$$ {}^{R}\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]^T \qquad (1.41) $$

b) Toán tử sóng của véctơ trong không gian ba chiều

Để chuẩn bị xây dựng các phép tính của véctơ đại số ta đưa vào khái niệm toán tử sóng của véctơ đại số **a** trong không gian ba chiều, ký hiệu là $\tilde{\mathbf{a}}$.

Định nghĩa: Cho véctơ trong không gian ba chiều $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]^T$. Toán tử sóng của véctơ đại số **a** là một ma trận vuông cấp ba và được định nghĩa như sau:

$$ \tilde{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (1.42) $$

c) Các phép toán với véctơ đại sô

Ta sử dụng các phép tính đại số ma trận để tính toán các véctơ đại số bởi vì véctơ đại số thực chất là ma trận cột. Điểm khác nhau cần nhấn mạnh giữa véctơ đại số và ma trận cột nói chung là véctơ đại số phụ thuộc vào hệ qui chiếu. Dưới đây ta sử dụng thuật ngữ "Ngôn ngữ véctơ đại số" để chỉ các phép toán đối với véctơ đại số và thuật ngữ "Ngôn ngữ ma trận" để chỉ các phép toán ma trận đối với véctơ đại số.

Bảng 1.2. Các phép toán véctơ đại số

Phép toán	Ngôn ngữ véctơ đại số	Ngôn ngữ ma trận
Tổng của hai véctơ	$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$	$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$
Tích vô hướng của hai véctơ	$\alpha = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$	$\alpha = \mathbf{a}^T\mathbf{b} = \mathbf{b}^T\mathbf{a}$
Tích véctơ của hai véctơ	$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$	$\mathbf{c} = \tilde{\mathbf{a}}\mathbf{b}$
Tích hỗn hợp của ba véctơ	$\alpha = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$	$\alpha = \mathbf{a}^T(\tilde{\mathbf{b}}\mathbf{c})$
Tích véctơ kép của ba véctơ	$\mathbf{d} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$	$\mathbf{d} = \tilde{\mathbf{a}}(\tilde{\mathbf{b}}\mathbf{c})$

d) theo của

Gọi **x** là một biến véctơ, **x** là một véctơ cột có dạng:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T \tag{1.43}$$

Gọi α là hàm vô hướng của biến **x**: $\alpha = \alpha(\mathbf{x}) = \alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Đạo hàm riêng hàm vô hướng $\alpha(\mathbf{x})$ theo **x** được xác định như sau:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{x}} = \partial\alpha \frac{1}{\partial \mathbf{x}^T} \tag{1.44}$$

với $\partial\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \partial x_1 & \cdots & \partial x_n \end{bmatrix}^T \Leftrightarrow \partial\mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} \partial x_1 & \cdots & \partial x_n \end{bmatrix}$. Thay vào ta có:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \alpha}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \alpha}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial \alpha}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{1.45}$$

e) Đạo hàm riêng của theo

Cho véctơ hàm $\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} a_1(\mathbf{x}) & a_2(\mathbf{x}) & \cdots & a_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix}^T \in R^m$.

Đạo hàm riêng hàm véctơ **a**(**x**) theo biến véctơ **x** được xác định như sau:

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial a_1}{\partial \mathbf{x}} \\ \dfrac{\partial a_2}{\partial \mathbf{x}} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial a_m}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial a_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial a_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial a_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial a_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial a_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial a_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial a_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial a_m}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial a_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \in R^{m \times n} \tag{1.46}$$

Ma trận trong biểu thức trên tương đương với ma trận Jacobi của véctơ **a** theo **x**.

Ví dụ 1.3: Cho véctơ $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T$. Tính $\dfrac{\partial \mathbf{x}^T}{\partial \mathbf{x}}$.

Giải:

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \partial x_1 / \partial \mathbf{x} \\ \vdots \\ \partial x_n / \partial \mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}_{n \times n} = \mathbf{E}_n \tag{1.47}$$

$\mathbf{E}_n$ là ma trận đơn vị cỡ $n \times n$.

$$\frac{\partial \mathbf{x}^T}{\partial \mathbf{x}} = \left[\frac{\partial x_1}{\partial \mathbf{x}} \quad \frac{\partial x_2}{\partial \mathbf{x}} \quad \cdots \quad \frac{\partial x_n}{\partial \mathbf{x}} \right] = \left[1,0,\ldots,0 \quad 0,1,0,\ldots,0 \quad \cdots \quad 0,\ldots,0,1 \right] \in R^{1 \times n^2} \tag{1.48}$$

e) Đạo hàm riêng theo [redacted] của [redacted]

Cho hàm ma trận $\mathbf{A}(\mathbf{x}) \in R^{m \times p}$, biến véctơ ... Ma trận **A** có dạng

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} a_{11}(\mathbf{x}) & \cdots & a_{1p}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}(\mathbf{x}) & \cdots & a_{mp}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_p \end{bmatrix} \tag{1.49}$$

Với $\mathbf{a}_i$ là các véctơ cột thứ i của ma trận **A**.

Đạo hàm riêng của hàm ma trận $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ theo biến véctơ $\mathbf{x}$:

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{x}} = \left[\frac{\partial \mathbf{a}_1}{\partial \mathbf{x}} \quad \cdots \quad \frac{\partial \mathbf{a}_p}{\partial \mathbf{x}} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_{11}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial a_{11}}{\partial x_n} & & \frac{\partial a_{1p}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial a_{1p}}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial a_{m1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial a_{m1}}{\partial x_n} & & \frac{\partial a_{mp}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial a_{mp}}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{1.50}$$

Ma trận trong biểu thức trên là ma trận cỡ *m* hàng, *np* cột.

1.3.3. Các hàm lượng giác hay dùng

a) Hàm tan θ

Hàm lượng giác $\tan\theta$ được định nghĩa bởi biểu thức sau:

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \tag{1.51}$$

Khi $x > 0$:

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \left(-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \right), y > 0 : 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}, y < 0 : -\frac{\pi}{2} \le \theta \le 0 \tag{1.52}$$

Khi $x = 0$:

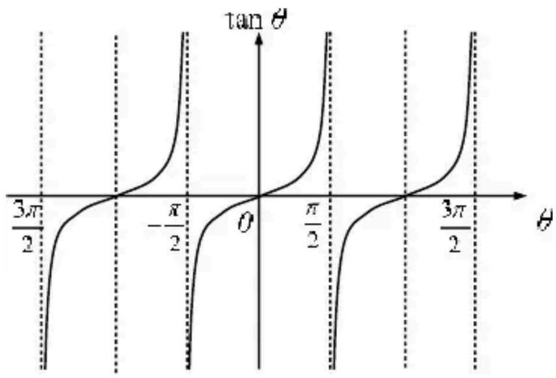
$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \infty \left(\theta = \pm\frac{\pi}{2} \right), y > 0 : \theta = \frac{\pi}{2}, y < 0 : \theta = -\frac{\pi}{2} \tag{1.53}$$

DO NOT COPY

Khi $x<0$:

$$\tan\theta=\frac{y}{x}\left(\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{3\pi}{2}\right),y>0:\frac{\pi}{2}\le\theta\le\pi,y<0:\pi\le\theta\le\frac{3\pi}{2} \qquad (1.54)$$

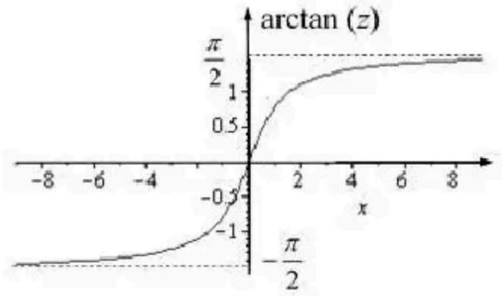
Đồ thị hàm $u=\tan\theta$ được cho như trên hình 1.25.



Hình 1.23. Đồ thị hàm tan

b) Hàm atan2(y,x)

Hàm ngược của hàm $\tan\theta=\frac{y}{x}$ là hàm $\theta=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$. Trên Hình 1.26. là đồ thị hàm $\theta=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ với $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$.



Hình 1.24. Đồ thị hàm arctan

Để xác định hàm atan2*(y,x)*, ta xét hàm $\theta=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ với $0\le\theta\le2\pi$. Hàm $\theta=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ mà θ biến thiên trong khoảng từ 0 đến 2π là cơ sở để định nghĩa hàm atan2*(y,x)*.

Hàm $\theta = \text{atan2}(y,x)$ là hàm xác định trong khoảng giá trị $0 \le \theta \le 2\pi$ và được định nghĩa bởi công thức:

$$\text{atan2}(y,x) = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) & \text{khi} \quad x > 0, y \ge 0 \\ \pi/2 & \text{khi} \quad x = 0, y > 0 \\ \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) + \pi & \text{khi} \quad x < 0, y \ge 0 \\ 3\pi/2 & \text{khi} \quad x = 0, y < 0 \\ \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) + 2\pi & \text{khi} \quad x > 0, y < 0 \end{cases} \qquad (1.55)$$

Chú ý: Tại $x = 0, y = 0$ thì hàm atan2(0,0) không xác định.

1.4. CÔNG CỤ TOÁN, TIN HỌC PHÂN TÍCH ĐỘNG LỰC HỌC HỆ NHIỀU VẬT

Hiện nay, có nhiều phần mềm trên thế giới có thể hỗ trợ rất hiệu quả trong việc giải quiết các bài toán phân tích, mô phỏng và điều khiển các hệ nhiều vật. Có thể liệt kê một số nhóm phần mềm như sau:

- Nhóm phần mềm hỗ trợ tính toán thiết kế và mô phỏng hệ nhiều vật: Inventor, SolidWorks, Pro/E, CATIA… Bên cạnh chức năng thiết kế 3D các chi tiết cơ khí thuộc hệ nhiều vật, những phần mềm này đều có chức năng tính toán các thông số động học và động lực học cơ bản cho từng khâu, khớp thuộc hệ nhiều vật đồng thời cũng giúp giải quiết một số bài toán tính toán tối ưu thiết kế hệ nhiều vật.

- Nhóm phần mềm hỗ trợ mô hình hóa, mô phỏng và điều khiển hệ nhiều vật: MATLAB/Simulink, Maple, Mathematica, SciLab… Những phần mềm này cung cấp rất nhiều công cụ trong xây dựng mô hình toán (động học, động lực học), phân tích đặc tính hệ nhiều vật, giải quiết các bài toán mô phỏng và điều khiển, kiểm chứng nhiều thuật toán khác nhau.

- Nhóm phần mềm hỗ trợ mô phỏng, điều khiển trực quan gần với đáp ứng vật lý của mô hình thật: MSC Adams (kết hợp với MATLAB/Simulink), SOFA, XDE… Những phần mềm này giúp xây dựng mô hình mô phỏng dựa

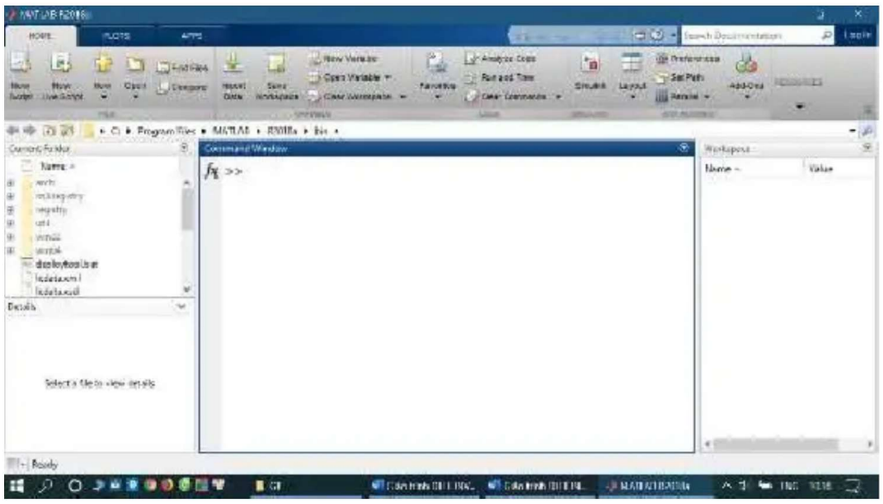
trên các tín hiệu đầu vào là các đại lượng vật lý gần với thực tế như lực, mômen… có thể thay thế mô hình thật để thực hiện kiểm chứng các đặc tính của hệ nhiều vật, đặc biệt là các đáp ứng về động lực học.

Giáo trình này sẽ giới thiệu phần mềm MATLAB/Simulink với một số chức năng cơ bản trong việc hỗ trợ lập trình, giải quiết các bài toán xây dựng mô hình, mô phỏng các hệ nhiều vật.

1.4.1. Môi trường làm việc của MATLAB

MATLAB là một ngôn ngữ lập trình cấp cao được sử dụng rộng rãi trong môi trường học thuật và công nghệ. MATLAB được viết tắt từ **MAT**rix **LAB**oratory do mục đích ban đầu của MATLAB là xây dựng nên một công cụ hỗ trợ việc tính toán các ma trận một cách dễ dàng nhất. MATLAB được xem là lựa chọn ưu tiên cho người làm kỹ thuật vì có khả năng hỗ trợ tối ưu cho việc nghiên cứu cũng như dạy học đối với các môn toán học, kỹ thuật và khoa học.

Màn hình làm việc chính của MATLAB như trên (Hình 1.27), gồm các cửa sổ Command Window, Current Directory, Workspace và Command History. Người dùng có thể tùy chỉnh việc sắp xếp các cửa sổ trên màn hình làm việc bằng cách kéo chúng đến vị trí mong muốn.



Hình 1.25. Màn hình làm việc của MATLAB

Cửa sổ chính là *Command Window* (cửa sổ lệnh) cho phép người dùng nhập và thực thi các câu lệnh trong chế độ tương tác (interactive mode). Ở chế độ này, sau khi gõ câu lệnh và thực thi, kết quả sẽ được hiển thị ra ngay trong Command Window. Tuy nhiên, nếu người dùng chỉ cần thực thi câu lệnh mà không cần hiển thị kết quả, chỉ cần thêm dấu chấm phẩy (;) ngay sau câu lệnh.

Cửa sổ *Current directory* thể hiện thư mục đang làm việc. Khi muốn thực thi một tập tin *.m nào đó, phải chắc chắn rằng tập tin đó được nhìn thấy trong cửa sổ này.

Cửa sổ *Workspace* chứa danh sách các biến đã được khai báo và sử dụng trong chương trình. Ở cửa sổ này này, có thể đọc được tên biến, giá trị, kích thước của biến,...

Cửa sổ *Command History* chứa danh sách các câu lệnh đã được thực thi trong Command Window. Người dùng có thể nhấp đúp chuột vào một lệnh bất kì để chương trình thực hiện lại lệnh đó. Cũng có thể dùng phím mũi tên lên (↑), xuống (↓) trong cửa sổ lệnh để tìm lại các lệnh mà chương trình đã thực thi.

Bên cạnh đó, MATLAB có chế độ kịch bản (script mode) hỗ trợ cho người dùng khi lập trình các hàm hay chương trình từ đơn giản đến phức tạp. Các câu lệnh sẽ được lưu trong một tập tin có phần mở rộng *.m* và được thực thi một lần khi chạy chương trình.

1.4.2. Hàm toán học và quản lý dữ liệu trong MATLAB

MATLAB có sẵn rất nhiều hàm toán học, được sử dụng khá đơn giản bằng cách nhập trực tiếp tên hàm với các tham số được gán giá trị trực tiếp hoặc là các biến đã được khai báo. Để xem hướng dẫn chi tiết về cú pháp và ví dụ của một hàm toán học nào đó, gõ trực tiếp tên hàm vào cửa sổ Help của MATLAB. 0 dưới đây là các hàm toán học thường dùng của MATLAB.

Bảng 1.3. Các hàm toán học thường dùng của MATLAB

Tên hàm	Chức năng	Tên hàm	Chức năng
sqrt(x)	Căn bậc hai	rem(x,y)	Số dư của phép chia x/y
exp(x)	Hàm mũ cơ số e	round(x)	Làm tròn số
log(x)	Logarithm tự nhiên	ceil(x)	Làm tròn lên
log10(x)	Logarithm thập phân	floor(x)	Làm tròn xuống
abs(x)	Giá trị tuyệt đối	sum(v)	Tổng các phần tử véctơ
sign(x)	Hàm dấu	prod(v)	Tích các phần tử véctơ
real(x)	Phần thực	min(v)	Phần tử véctơ bé nhất
imag(x)	Phần ảo	max(v)	Phần tử véctơ lớn nhất
phase(x)	Góc pha của số phức	mean(v)	Giá trị trung bình cộng
sin(x)	Hàm sin	atan(x)	Hàm arctg $\pm 90^0$
cos (x)	Hàm cos	atan2(x)	Hàm arctg $\pm 180^0$
tan(x)	Hàm tg	sinc(x)	Hàm sin(pi*x)/(pi*x)

Các phép so sánh và logic có thể sử dụng cho tất cả các số. Khi thực hiện, các giá trị khác 0 ứng với logic TRUE (đúng) và các giá trị 0 ứng với logic FALSE (sai). Kết quả xuất hiện trên màn hình sẽ là 1 hoặc 0.

Các phép so sánh và logic trong MATLAB được thực hiện bởi các hàm như sau:

eq(a,b)	so sánh bằng
ne(a,b)	so sánh khác
lt(a,b)	so sánh bé hơn
le(a,b)	so sánh bé hơn hoặc bằng
gt(a,b)	so sánh lớn hơn
ge(a,b)	so sánh lớn hơn hoặc bằng
not(a,b)	logic NOT
and(a,b)	logic AND
or(a,b)	logic OR
xor(a,b)	logic XOR

a) Khai báo biến

Để khai báo và gán giá trị cho biến, sử dụng cú pháp:

tên biến = giá trị;

Tên của biến có thể chứa tới 32 ký tự, bao gồm chữ cái, chữ số và dấu gạch dưới (_). Chữ cái viết hoa và chữ thường được coi là khác nhau. Tất cả các biến đều được coi là biến toàn cục (global) trong Workspace.

Khi nhập tên của một biến mà không gán giá trị sẽ thu được giá trị hiện tại của biến. Việc khai báo và gán giá trị cho biến có thể được thực hiện thành một chuỗi lệnh trong cùng một dòng, cách nhau bởi dấu phẩy (,) hoặc chấm phẩy (;). Nếu sử dụng dấu phẩy (,) để tách các lệnh thì kết quả sẽ được xuất ra màn hình.

```
>> bien_1 = 25, bien_2 = 10;
>> bien_1
bien _1 = 25
>> a = bien_1 + bien_2, A = bien_1 / bien_2
a = 35
A = 2.5000
```

Một số tên riêng như *pi*, *i*, *j* và *inf* đã được MATLAB dùng để chỉ các hằng số hay ký hiệu, vậy nên phải tránh sử dụng chúng. Đối với các phép tính bất định, trên màn hình sẽ hiện kết quả *NaN* (Not A Number).

```
>> 1/0
Warning: Divide by zero.
ans =
Inf (Infinity)
>> 0/0
Warning: Divide by zero.
ans =
NaN (Not a Number)
```

b) Quản lý biến

DO NOT COPY

Kích cỡ của một biến dạng véctơ hay ma trận được xác định bởi lệnh size(tên biến) hoặc lệnh length(tên biến). Nếu sử dụng lệnh length(tên biến) cho ma trận sẽ thu được kết quả là độ lớn của véctơ lớn nhất trong ma trận.

```
>> a = [2 4 5;1 2 4]
a =
2     4     5
1     2     4
>> length(a)
ans = 3
>> size(a)
ans =
2     3
```

Lệnh who liệt kê mọi biến đang tồn tại trong Workspace lên trên màn hình MATLAB. Lệnh whos cho biết thêm các thông tin về kích cỡ và bộ nhớ của biến.

```
>> whos
Name        Size       Bytes  Class
a           2x3           48  double array
b           3x2           48  double array
componist   1x2         1256  struct array
datum       1x1          398  struct array
Grand total is 221 elements using 3636 bytes
```

Lệnh `clear('tên biến 1', 'tên biến 2', ...]` sẽ xoá các biến được gọi tên trong danh sách. Nếu dùng lệnh clear không có tham số sẽ xoá toàn bộ biến trong Workspace.

Lệnh `exist('tên biến')` sẽ kiểm tra xem trong Workspace có tồn tại biến hay hàm nào tên là 'tên biến' hay không.

Nếu không có sẽ trả về kết quả là 0. Nếu kết quả khác 0, đó chính là số nói lên bản chất của biến, ví dụ `ans=1` thì 'tên biến' là tên một biến trong Workspace, `ans=2` thì 'tên biến' là tên một file của MATLAB.

c) Khai báo véctơ và ma trận

Cách đơn giản nhất để khai báo véctơ hoặc ma trận là nhập trực tiếp. Khi nhập trực tiếp, các phần tử của một hàng được cách nhau bởi dấu phẩy (,) hoặc dấu cách (space), các hàng ngăn cách bởi dấu chấm phẩy (;) hoặc ngắt dòng.

```
>> vector = [1 2 3 4 5]
vector =
1     2     3     4     5
>> matrix = [1 2 3 4 5; 6 7 8 9 0]
matrix =
1     2     3     4     5
6     7     8     9     0
```

Có thể tạo một vec tơ là một dãy các phần tử theo cú pháp sau:

```
vector = (giá trị đầu : gia số : giá trị cuối)
```

Nếu bỏ qua tham số "gia số", MATLAB sẽ tự động gán gia số là +1.

```
>> vector = (0:2:8)
vector =
0   2     4     6     8
>> vector = (0:8)
vector =
0   1   2   3   4   5   6   7   8
```

Cũng có thể tạo véctơ có các phần tử biến thiên tuyến tính (gọi là véctơ tuyến tính) bằng lệnh:

```
linspace(giá trị đầu, giá trị cuối, số phần tử)
>> vector = linspace(1,7,4)
vector =
1  3  5  7
```

Tạo véctơ có các phần tử biến thiên theo hàm logarithm (véctơ logarithm) bằng lệnh:

```
logspace(giá trị đầu, giá trị cuối, số phần tử)
```

DO NOT COPY

Trong đó, "giá trị đầu" và "giá trị cuối" là được nhập bởi số mũ thập phân, ví dụ: 100 = 10^2 chỉ cần nhập 2.

```
>> logspace(1,7,4)
ans =
10  1000   100000   10000000
```

Hàm `zeros(dòng, cột)` tạo ra ma trận không, hàm `eye(dòng)` tạo ra ma trận đơn vị. Hàm `ones(dòng, cột)` sẽ tạo ra ma trận có tất cả các phần tử bằng 1.

```
>> zeros(2,2)
ans =
0
0
>> eye(3)
ans =
1     0     0
0     1     0
0     0     1
>> ones(2,2)
ans =
1
1
```

Để tạo một ma trận với các phần tử nhận giá trị ngẫu nhiên, dùng lệnh `rand(dòng, cột)`.

```
>> matrix = rand(3,4)
matrix =
0.8147    0.9134    0.2785    0.9649
0.9058    0.6324    0.5469    0.1576
0.1270    0.0975    0.9575    0.9706
```

Việc truy xuất từng phần tử của véctơ hoặc ma trận được thực hiện bằng cách gọi tên véctơ hoặc ma trận với tham số là chỉ số của phần tử (lưu

ý chỉ số bắt đầu từ 1 chứ không phải là 0). Khi cần xuất từng hàng hay từng cột, có thể sử dụng toán tử (:).

```
>> num = matrix(2,3)
num =
8
>> num = matrix(2,:)
num =
7     8     9     0
```

d) Tính toán với véctơ và ma trận

Các phép tính với từng phần tử: nhân (.*), chia (./), lũy thừa (.^)

```
>> [2 3 4] .* [1 2 3]
ans =
2     6    12
>> [2 3 4] ./ [1 2 3]
ans =
2.0000    1.5000    1.3333
>> [2 3 4] .^ [1 2 3]
ans =
2     9    64
```

Chuyển vi ma trân matrix: `transpose(ma trận)`

```
>> transpose(matrix)
ans =
6
7
8
9
0
```

Chuyển vị ma trận có phần tử phức: `ctranspose(ma trận)`

DO NOT COPY

```
>> matrix = [1+i 1-i;2 3]
maxtrix =
1.0000 + 1.0000i   1.0000 - 1.0000i
3.0000
>> ctranspose(matrix)
ans =
1.0000 - 1.0000i   2.0000
1.0000 + 1.0000i   3.0000
```

Lưu ý: đối với các giá trị thực, lệnh `transpose(ma trận)` và `ctranspose(ma trận)` cho kết quả như nhau.

Đảo ma trân: `inv(ma trận)`

```
>> matrix = [1 2;4 9]
matrix =
2
9
>> inv(matrix)
ans =
9    -2
-4     1
```

Tính định thức của ma trận: `det(ma trận)`

```
>> det(matrix)
ans =
1
```

Tính các giá trị riêng của ma trận: `eig(ma trận)`

```
>> eig(matrix)
ans =
0.1010
9.8990
```

Xác định hạng của ma trận: `rank(ma trận)`

```
>> rank (matrix)
ans =
2
```

Chập véctơ (nhân đa thức): `conv(vector1, vector2)`

Nếu biểu diễn mỗi đa thức bằng một véctơ với các phần tử là hệ số của đa thức thì phép chập véctơ trả về một véctơ mới có các phần tử là hệ số của đa thức bằng tích các đa thức thành phần.

```
>> vector1 = [2 3 4]
vector1 =
2     3     4
>> vector2 = [1 2 3]
vector2 =
1     2     3
>> conv(vector1,vector2)
ans =
2     7    16    17    12
```

Hầu hết những hàm toán học cũng như các phép toán logic trong MATLAB cũng gần giống như trong ngôn ngữ lập trình C, C++. Người sử dụng có thể chuyển từ code chương trình MATLAB sang ngôn ngữ C/C++ một cách tương đối dễ dàng. Tuy nhiên cũng có một số điểm cần lưu ý như sau:

- Trong MATLAB, chỉ số nhỏ nhất của một véctơ hay của một ma trận là 1 và cách truy nhập một phần tử của vec tơ hay của một mảng thực hiện trong ngoặc đơn. Ví dụ truy nhập phần tử đầu tiên của một véctơ hay của một ma trận: **u**(1) , **A**(1,1). Điều này khác với ngôn ngữ C/C++, khi chỉ số nhỏ nhất của một dữ liệu kiểu mảng là 0, và sử dụng dấu ngoặc vuông để truy nhập đến từng phần tử (ví dụ **u**[0], **A**[0,0]).

- Trong MATLAB, phép logic kiểm tra sự khác nhau là (a ~= b). Trong khi ngôn ngữ C/C++ lại sử dụng (a != b).

- Các hàm toán học trong C/C++ tuân theo thư viện chuẩn ANSI C. Do đó, cần kiểm tra cú pháp của hàm MATLAB tương ứng với thư viện ANSI C nếu muốn chuyển đổi.

DO NOT COPY

1.4.3. Công cụ Symbolic trong MATLAB

Symbolic là một công cụ rất hiệu quả trong MATLAB, hỗ trợ cho người dùng tính toán, xây dựng các mô hình toán cũng như giải quiết các phương trình toán và đưa ra lời giải ở dạng tường minh (dạng chữ). Công cụ này đặc biệt hữu ích và được dùng khá phổ biến trong các bài toán tìm biểu diễn tường minh của mô hình động học, động lực học của hệ nhiều vật.

a) Cách biểu diễn Symbolic

Định nghĩa và khởi tạo các biến Symbolic:

```
>> syms x y
>> syms x y real  ( nếu x, y là số thực)
```

Định nghĩa các hằng số:

```
>> delta = sym('1/100') ;
>> sqrt2 = sym('sqrt(2)') ;
>> pi = sym('pi'); %(pi biểu diễn thay cho số π)
```

Biểu diễn một tổ hợp đại số:

```
>> syms   s   t   A
>> f = s^2 + 2*s + 5
f =
s^2 + 2*s + 5
>> g = s + 5
g = s+2
>> h = f*g
h =
(s^2+2*s+5)*(s+2)
>> z = exp(-s*t)
z =
exp(-s*t)
>> y = A*exp(-s*t)
y =
A*exp(-s*t)
```

Các biến symbolic s, t, A được định nghĩa đầu tiên, sau đó ta mới sử dụng được các tổ hợp đại số để tạo ra các biến (hàm) f, g, h, z và y. Kết quả cho thấy các giá trị tạo ra vẫn giữ ở dạng đối tượng symbolic chứ không được tính toán ra giá trị cụ thể.

Các biến s, t, A là các biến symbolic độc lập. Các biến còn lại đều phụ thuộc vào s, t, A. Để xác định trong một biểu thức đâu là các biến độc lập, ta có thể sử dụng lệnh '`findsym(S)`' hoặc '`symvar(S)`':

```
>> findsym(f)
ans = s
>> findsyms(z)
ans = A, s, t
```

Các cách biểu diễn véctơ hay ma trận trong MATLAB cũng áp dụng được đối với các biến symbolic. Ví dụ :

```
>>sym([0.01 0.5 2.0])
ans = [ 1/100, 1/2, 2]
>> sym(ceil(100*rand(3,3)))
ans =
[ 40, 71,  5]
[ 66,  4, 10]
[ 18, 28, 83]
>> n = 3 ;
>> syms x ;
>> A = x.^((0 :n)'*(0 :n))
A =
[ 1,   1,   1,   1]
[ 1,   x, x^2, x^3]
[ 1, x^2, x^4, x^6]
[ 1, x^3, x^6, x^9]
```


DO NOT COPY

b) Một số phép toán cơ bản với công cụ Symbolic

`expand(S)`	Khai triển biểu thức dưới dạng đa thức
`factor(S)`	Khai triển biểu thức dưới dạng tích của nhiều hạng tử
`simplify(S)`	Đơn giản hóa biểu thức
`[n,d] = numden(S)`	Trả về biểu thức tử số (n - num) và mẫu số (d - den) của một phân thức
`subs(S,old,new)`	Tạo ra một biểu thức mới bằng cách thay thế biến symbolic cũ bằng biến symbolic mới

Tính đạo hàm:

`diff(E)`	Đạo hàm một biểu thức toán theo biến
`diff(E,v)`	Đạo hàm theo một biến v
`diff(E,n)`	Đạo hàm bậc n của E
`diff(E,v,n)`	Đạo hàm bậc n của E theo biến v

Tính tích phân:

`int(E)`	Tích phân không xác định của một biểu thức E theo biến symbolic của nó
`int(E,v)`	Tích phân không xác định của E theo một biến v
`int(E,a,b)`	Tích phân xác định của E trong khoảng [a,b]. a, b có thể là số thực, cũng có thể có dạng symbolic
`int(E,v,a,b)`	Tích phân xác định của E theo một biến v trong khoảng [a,b]

Giải phương trình đại số:

`[var1,var2,…,varN]=solve(E1,E2,…,EN)` `[var1,var2,…,varN] = solve(E1,E2,…,EN, 'var1', 'var2',…, 'varN')`
Giải hệ phương trình `E1=0,…,EN=0` với các biến `var1,…,varN`

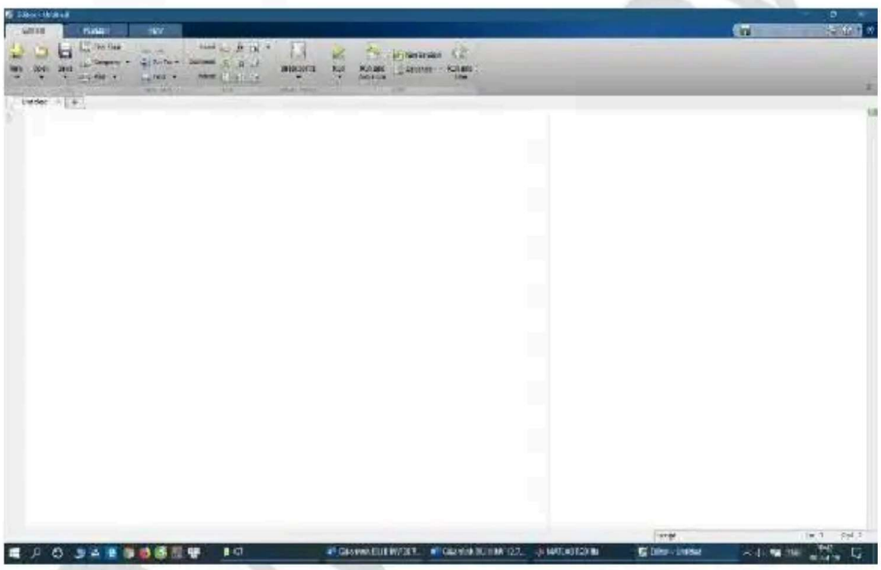
Giải phương trình vi phân:

`dsolve('e1, e2,..., en', 'c1, c2,..., cn', 'v')`
Giải hệ phương trình vi phân với các phương trình con e_i và các điều kiện biên c_i. Trong đó **v** là véctơ các biến phụ thuộc (e.g. thời gian).

1.4.4. Lập trình trong MATLAB

Bên cạnh khả năng nhập lệnh trực tiếp trong cửa sổ Command Window, có thể viết và lưu các câu lệnh MATLAB vào một file kịch bản (script file) dạng mã ASCII và lưu với phần mở rộng là *.m.

Một script file có thể được soạn thảo trong cửa sổ Editor của MATLAB bằng cách gọi menu File/New/M-file hoặc gọi trực tiếp nhờ nút lệnh trên thanh công cụ MATLAB.



Hình 1.26. Trình soạn thảo script file của MATLAB

Cũng có thể sử dụng bất kỳ trình soạn thảo mã ASCII nào khác để tạo lập, chỉnh sửa script file. Khi một dòng lệnh quá dài, có thể xuống dòng (chưa kết thúc) bằng dấu ba chấm (…). Khi muốn viết một dòng chú thích, đặt dấu phần trăm (%) ở đầu dòng. Có thể sử dụng phím tắt Ctrl+R để biến các dòng đã chọn trở thành chú thích và Ctrl+T để loại bỏ ký hiệu chú thích trước các dòng chú thích.

Để thực thi một script file, nhấn vào biểu tượng Run trên thanh công cụ của cửa sổ soạn thảo Editor hoặc sử dụng phím tắt F5. Cũng có thể chạy một script file bằng cách nhập tên file (không có phần mở rộng) tại dấu nhắc lệnh trong cửa sổ lệnh Commnad Window.

Tương tự như các ngôn ngữ lập trình khác, MATLAB cũng hỗ trợ công cụ debug giúp người dùng kiểm tra chương trình của mình từng bước nhằm phát hiện lỗi sai trong quá trình viết.

Một dạng đặc biệt của script file là các hàm (function) của MATLAB. Khi gọi một hàm có thể truyền dữ liệu cho hàm hay nhận dữ liệu do hàm đó trả lại. Ngoài ra, một hàm cũng có thể được các hàm khác hay script file gọi đến.

Các biến trong phạm vi một hàm là biến cục bộ (local). Các biến toàn cục (global) phải được định nghĩa trực tiếp từ cửa sổ lệnh Command Window, trong một script file hoặc cũng có thể định nghĩa trong phạm vi một hàm.

a) Lệnh rẽ nhánh if và switch

Lệnh rẽ nhánh if và switch dùng các phép so sánh và logic ở mục trước để làm điều kiện thực hiện các lệnh:

```
if đk_1 lệnh_1
[elseif đk_2 lệnh_2]
[else lệnh_3] end
swith tên_biến case
giá_trị_1; lệnh_1,
[case giá_trị_2; lệnh_2, ...]
[otherwise lệnh_n] end
```

Đoạn chương trình sau minh họa cách dùng lệnh rẽ nhánh if và switch:

```
>> test = 3;
>> if test<=2; a=2,…
elseif test<=5; a=5,…
else a=10, end;
a =
5
>> switch test case 2; a=2,…
case {3 4 5}; a=5,…
otherwise a=10, end;
a = 5
```

Trong cả hai trường hợp trên, các lệnh con được ngăn cách bởi dấu chấm phẩy (;) và dấu phẩy (,).

b) Vòng lặp for và while

Vòng lặp for và while cho phép thực hiện lặp lại nhiều lần một số lệnh nhất định theo cú pháp:

```
for tên_biến = điều_kiện các_câu_lệnh end
while điều_kiện các_câu _lệnh end
```

Đoạn chương trình sau minh họa cách dùng vòng lặp for và while.

```
for k=1:2;
p=k^2
end;
n = 1;
while 1
n=n+1;
m=n^2
if m>10
break;
end;
end
```

Chạy chương trình, nhận được kết quả như sau:

```
p = 1; p = 4; m = 4; m = 9; m = 16
```

Trong ví dụ trên vòng lặp for được thực hiện 2 lần vì điều kiện dừng được kiểm tra trước. Ngược lại, vòng lặp while được thực hiện 3 lần vì điều kiện dừng chỉ được kiểm tra sau cùng.

c) Gián đoạn bằng continue và break

Hai lệnh hay được sử dụng để điều khiển chu trình tính toán là continue và break. Khi gọi lệnh continue trong vòng lặp for hay while, ngay lập tức chu trình tính toán sẽ chuyển sang bước lặp kế tiếp, mọi lệnh chưa thực hiện của vòng lặp sẽ bị bỏ qua. Lệnh break sẽ dừng mọi vòng lặp đang tính, cả trong các cấu trúc rẽ nhánh dùng if, switch. Nếu break được sử dụng ngoài vòng for, while trong phạm vi của một script file hay hàm của MATLAB, khi ấy script file và hàm sẽ bị ngừng tại vị trí của break.

DO NOT COPY

Đoạn chương trình sau dùng vòng lặp for, câu lệnh điều kiện if và các lệnh gián đoạn bằng continue và break kiểm tra xem trong các số nguyên thuộc khoảng từ 3 đến 10 có số nào là số nguyên tố.

```
for m = 3:1:10
for n = 2:1:m-1
if mod(m,n) ~= 0
continue
end
fprintf('%2d khong phai la so nguyen to!\n',m)
break
end % n
if n == m-1
fprintf('%2d la so nguyen to!\n', m)
end % if
end % m
```

Chạy chương trình nhận được kết quả như sau:

```
la so nguyen to!
khong phai la so nguyen to!
la so nguyen to!
khong phai la so nguyen to!
la so nguyen to!
khong phai la so nguyen to!
khong phai la so nguyen to!
khong phai la so nguyen to!
```

d) Xây dựng hàm số trong MATLAB

Cũng giống như các ngôn ngữ lập trình như C/C++, MATLAB cho phép người dùng xây dựng các hàm tính toán với các tham số biến đầu vào đầu ra trên M-file.

Các biến được sử dụng trong phạm vi một hàm là biến cục bộ (local). Các biến toàn cục (global) phải được định nghĩa trực tiếp từ cửa sổ lệnh Command Window, trong một script file hoặc cũng có thể định nghĩa trong phạm vi một hàm.

Dưới đây là một ví dụ xây dựng hàm tính toán ma trận Jacobi ở dạng tường minh (sử dụng công cụ Symbolic) cho một hệ nhiều vật tay máy nối tiếp hai bậc tự do (hệ nhiều vật này sẽ được đề cập đến trong các chương tiếp theo của giáo trình).

```
function [J0E,JEE] = Jacobian_SCARA_2DOF(U,V)
% Đầu ra: J0E – Ma trận Jacobi của khâu công
tác % đối với R0
% JEE – Ma trận Jacobi của khâu công
% tác đối với RE
%% Đầu vào: U,V – các tham số đầu vào
%% Khai báo thông số của robot o dang symbolic
syms L1 L2 TH1 TH2;
% Khai báo tham số hình học
alpha = sym([0 0 0].');
d = sym([0 L1 L2].');
theta = sym([TH1 TH2 0].');
r = sym([0 0 0].');
%% Tính các ma trận biến đổi thuần nhất
H01 = Rot_X(alpha(1))*Trans_X(d(1))*...
Rot_Z(theta(1))*Trans_Z(r(1));
H12 = Rot_X(alpha(2))*Trans_X(d(2))*...
Rot_Z(theta(2))*Trans_Z(r(2));
H2E = Rot_X(alpha(3))*Trans_X(d(3))*...
Rot_Z(theta(3))*Trans_Z(r(3));
H0E = H01*H12*H2E;
H0E = simplify(H0E);
Px = H0E(1,4);
Py = H0E(2,4);
J0E = [diff(Px,TH1) diff(Px,TH2)
       diff(Py,TH1) diff(Py,TH2)];
A0E = H0E(1:2,1:2);
JEE = A0E.'*J0E;
```

```
JEE = simplify(JEE);
%% Chương trình con
function R = Rot_X(TH)
R     = [1 0         0        0
         0 cos(TH) -sin(TH) 0
         0 sin(TH)  cos(TH) 0
         0 0         0        1];
function R = Rot_Z(TH)
R     = [cos(TH) -sin(TH) 0 0
         sin(TH)  cos(TH) 0 0
         0         0        1 0
         0         0        0 1];
function R = Trans_X(d)
R = [1 0 0 d
     0 1 0 0
     0 0 1 0
     0 0 0 1];
function R = Trans_Z(r)
R = [1 0 0 0
     0 1 0 0
     0 0 1 r
     0 0 0 1];
```

Khi chạy chương trình ở cửa sổ lệnh của MATLAB, ta sẽ nhận được kết quả sau:

```
>> [J0E,JEE] = Jacobian_SCARA_2DOF(0,0)
 J0E =
[-L2*sin(TH1+TH2)-L1*sin(TH1),-L2*sin(TH1+TH2)]
[L2*cos(TH1+TH2)+L1*cos(TH1),L2*cos(TH1+ TH2)]
JEE =
[      L1*sin(TH2),  0]
[ L2 + L1*cos(TH2), L2]
```

Trong ví dụ trên, tên hàm được đặt trùng với tên M-file trong MATLAB. Ở đây, đoạn code chương trình được lưu dưới một M-file có tên là "Jacobian_SCARA_2DOF.m",trong đó, các đại lượng đầu ra được đặt trong ngoặc vuông (ngăn cách bởi dấu " , "). Các đại lượng đầu vào được đặt trong ngoặc đơn ngay sau tên hàm và cũng được ngăn cách bằng dấu phẩy. Dòng đầu tiên của tệp M-file phải được bắt đầu bằng cú pháp tạo hàm "function". Sau đó là đến chương trình chính tính toán trong hàm số. Ngay phía dưới chương trình chính là các chương trình con cũng được viết với cấu trúc giống như chương trình chính. Các chương trình con này có thể được để trong cùng một M-file, cũng có thể được viết riêng trong M-file khác với điều kiện các M-file này phải được lưu với tên của hàm chương trình con và được lưu trong cùng một thư mục chứa M-file của chương trình chính.

1.4.5. Biểu diễn đồ họa trong MATLAB

a) Tạo lập cửa sổ đồ họa

Các kết quả dạng đồ họa (đồ thị, hình vẽ,…) được xuất ra trong cửa sổ riêng của MATLAB với tên gọi là Figure N, trong đó N là chỉ số của cửa sổ đồ họa.

Lệnh figure tạo lập một cửa sổ đồ hoạ mới. Mỗi cửa sổ tạo ra sẽ tự động được đánh số.

Lệnh subplot(số hàng, số cột, vị trí) chia cửa sổ đồ họa thành nhiều cửa sổ con theo "số hàng", "số cột" và xác định "vị trí" để xuất đồ họa.

Ví dụ: lệnh `subplot(121)` chia cửa sổ đồ họa thành 2 cột và sẽ xuất đồ họa tại vị trí cột thứ 1.

Có thể xoá nội dung của một cửa sổ đồ họa bằng lệnh `clf`. Lệnh `delete(N)` sẽ xoá cửa sổ đồ họa mang số N.

Lệnh `close(N)` sẽ đóng cửa sổ đồ họa mang số N, trong khi lệnh `close all` sẽ đóng tất cả các cửa sổ đồ họa đang mở.

Việc chia thang bậc của trục tọa độ thường được MATLAB tự động thực hiện. Tuy nhiên, có thể chia thủ công bằng lệnh:

```
axis([x_min,x_max,y_min,y_max,z_min,z_max])
```

Lệnh `axis('auto')` sẽ trao quiền chia trục tọa độ lại cho MATLAB. Lệnh `grid` on sẽ tạo ra một lưới toạ độ ứng với cách chia trục đã xác định. Đối với đồ hoạ 3-D có thêm lệnh `box` on để tạo khung bao cho đồ thị.

Để viết các đoạn ký tự trên một cửa sổ đồ hoạ có nhiều lệnh khác nhau. Các lệnh:

`xlabel('tên'), ylabel('tên'), zlabel('tên')`

viết tên cho các trục.

Lệnh `title('tên')` viết tên cho cửa sổ đồ hoạ.

Lệnh `text(x_value, y_value, 'nội dung')` cho phép điền đoạn văn bản "nội dung" vào toạ độ `x_value, y_value` trong đồ hoạ.

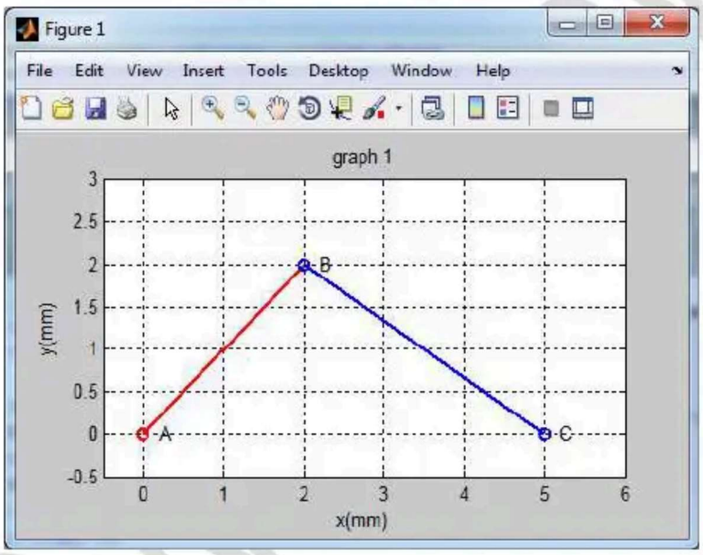
Mỗi lần gọi mới lệnh vẽ (`plot`), các đồ họa đã có trước đó trong cửa sổ đồ hoạ (hoặc trong cửa sổ đồ họa con) hiện tại sẽ bị xoá. Nếu muốn giữ lại các đồ họa đã vẽ phải dùng lệnh `hold on` sau lệnh vẽ đầu tiên.

Ví dụ sau minh họa các lệnh tạo lập cửa sổ đồ họa.

```
clear all;
close all;
clc; figure;
xA=0; yA=0;
xB=2;yB=2;
xC=5,yC=0;
plot([xA, xB], [yA, yB], 'r-o', ...
'linewidth',2);
hold on;
plot([xB, xC], [yB, yC], 'b-o',...
'linewidth',2);
plot([xA, xC], [yA, yC], 'g-o', ...
'linewidth',2);
xlabel('x(mm)');
ylabel('y(mm)');
```

```
title('graph 1');
text(xA+0.2,yA,'A');
text(xB+0.2,yB,'B');
text(xC+0.2,yC,'C');
axis('equal',[-0.5,6,-0.5,3]);
grid on;
```

Chạy chương trình nhận được kết quả như trên hình 1.29.



Hình 1.27. Tạo lập các đối tượng đồ họa

b) Vẽ đồ thị

Lệnh `plot(x_value,y_value …[,plotstyle])` vẽ đồ thị nối các điểm được định nghĩa bởi cặp véctơ `x_value, y_value`. Nếu thiếu thành phần `x_value`, khi ấy các giá trị của `y_value` sẽ được vẽ theo thứ tự chỉ số của chúng. Nếu `y_value` là các giá trị phức, khi ấy đồ thị vẽ với hai trục ảo và trục thực.

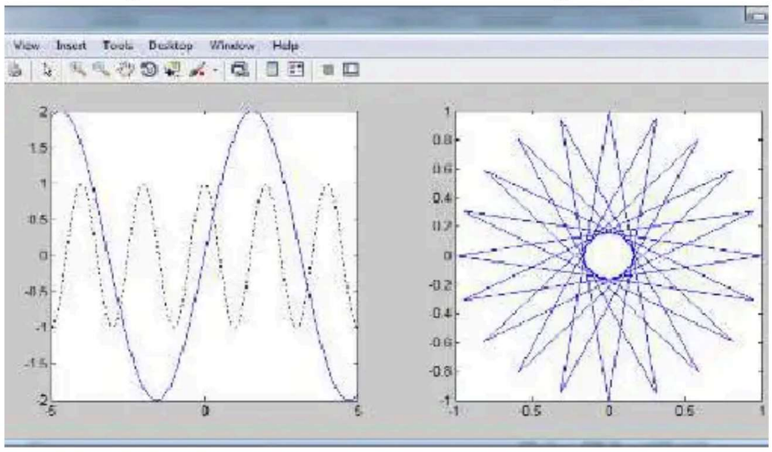
Chuỗi ký tự `plotstyle` cấu tạo bởi hai thành phần: thành phần thứ nhất là một chữ cái để chỉ mầu của nét vẽ và thành phần thứ hai là chuỗi ký tự đặc trưng cho kiểu đường nét của đồ thị (0).

Bảng 1.4. Các ký tự dùng để định nghĩa màu vẽ và kiểu nét

Ký tự	Màu	Ký tự	Kiểu nét
k	Màu đen	-	Nét liền
b	Màu xanh lam	--	Nét đứt
c	Màu xám	:	Nét gạch chấm
g	Màu xanh lá cây	.	Nét chấm
r	Màu đỏ	o	Chấm tròn
m	Màu đỏ sẫm	*	Chấm sao
y	Màu vàng	+	Dấu cộng
w	Màu trắng	×	Dấu nhân

Nếu muốn vẽ đồ thị của các hàm tường minh, dùng lệnh `fplot('biểu thức', khoảng giá trị)`.

Đoạn chương trình sau minh họa vẽ các đồ thị dùng lệnh `plot` và `fplot`.



Hình 1.28. Vẽ đồ thị bằng lệnh plot và fplot

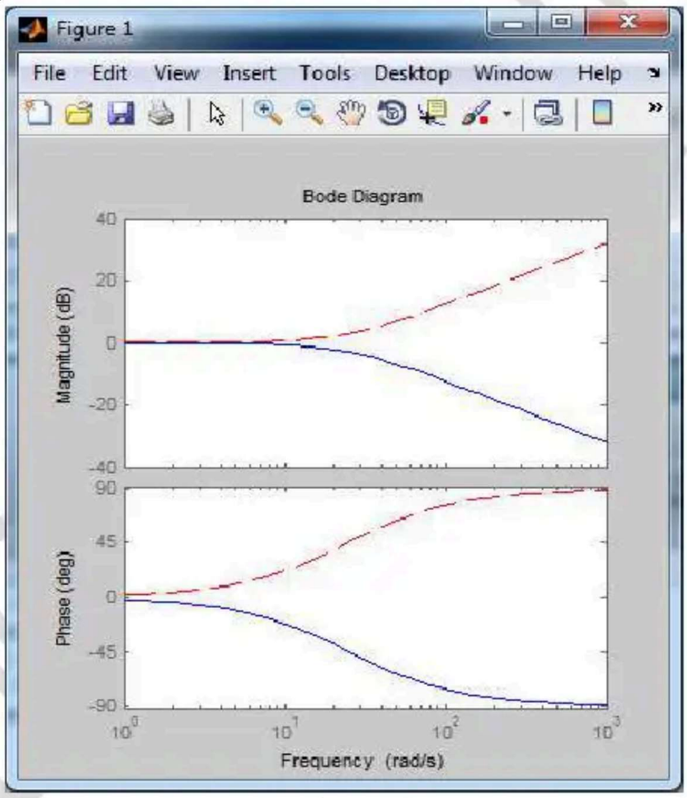
```
figure;
subplot (121);
plot([-5:0.1:5],cos((-5:0.1:5)*pi), 'k:');
hold on;
fplot ('2*sin(x)', [-5 5]);
subplot(122);
t = (0:20)*0.9*pi;
plot(cos(t),sin(t));
```

Chạy chương trình nhận được kết quả như trên hình 1.30.

Lệnh `semilogx, semilogy` và `loglog` có cú pháp giống như lệnh plot nhưng vẽ đồ thị với các trục được chia theo thang `logarithm`.

Lệnh `semilogx` có trục x chia theo thang `logarithm`, lệnh `semilogy` có trục y chia theo thang `logarithm`. Với lệnh `loglog` thì cả hai trục x và y được chia theo thang `logarithm`.

Chương trình sau minh họa dùng lệnh vẽ đồ thị theo biểu đồ bode (Hình 1.31).



Hình 1.29. Vẽ đồ thị bằng lệnh bode

```
figure;
pt1 = tf ([1],[0.04 1]);
pd = tf ([0.04 1], [1]);
bode (pt1,'b-',pd,'r--')
```

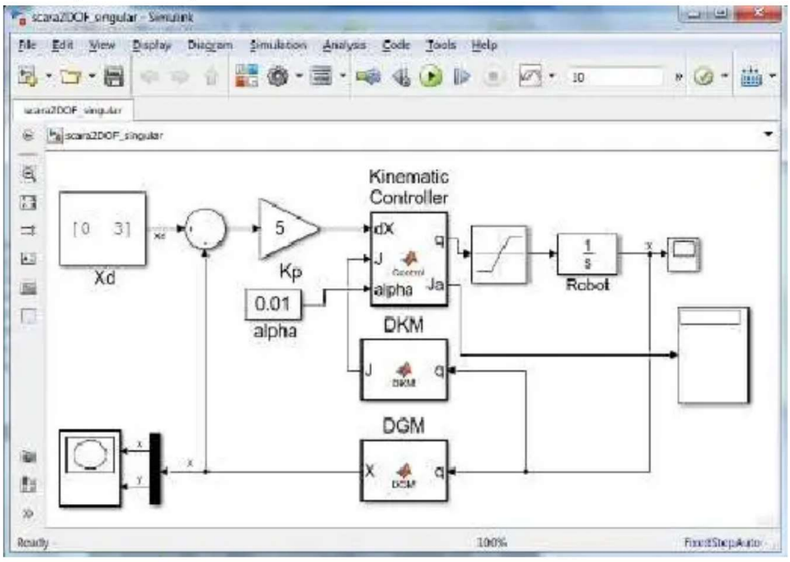
Lệnh plot3 có tác dụng tương tự như lệnh plot nhưng có thêm véctơ số liệu thứ ba dành cho trục z để vẽ các đồ thị 3-D.

Ví dụ sau minh họa vẽ đồ thị 3-D bằng lệnh plot3.

```
clear all; close all; clc;
phi = (0:100)/100*2*pi;
plot3(sin(2*phi), cos(3*phi), phi, 'r+');
xlabel('x'); ylabel('y'); zlabel('z');
title('graph 3D');
grid on;
```

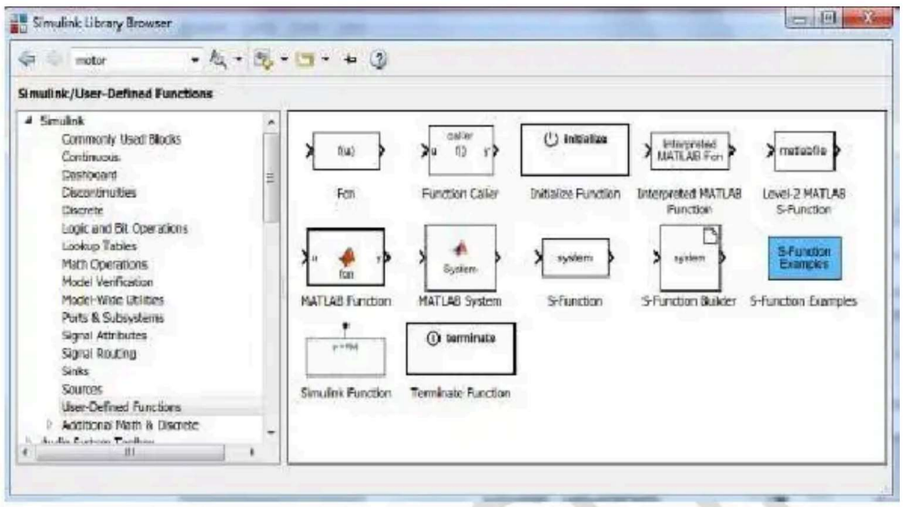
1.4.6. Làm việc với MATLAB/Simulink

Simulink là một công cụ rất mạnh của MATLAB trong việc hỗ trợ xây dựng các chương trình mô phỏng cho các bài toán mô hình hóa, phân tích và điều khiển hệ nhiều vật.



Hình 1.30. Cửa sổ làm việc chính của Simulink

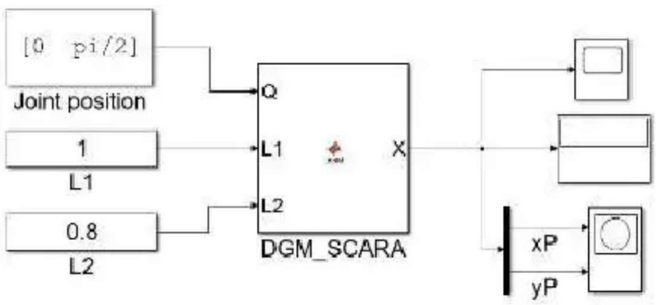
Trên Hình 1.32 thể hiện cửa sổ làm việc của một chương trình mô phỏng trên Simulink. Trên thanh công cụ có các nút chức năng chính như: mở thư viện Simulink, thiết đặt cấu hình mô phỏng, chạy mô phỏng, thời gian mô phỏng …



Hình 1.31. Cửa sổ thư viện công cụ trong Simulink

Một chương trình mô phỏng trên Simulink có thể được xây dựng dựa trên các khối cơ bản trong các công cụ (Toolbox) tích hợp trong Simulink (Hình 1.33). Người sử dụng có thể kéo thả các khối làm việc của các công cụ vào cửa sổ chương trình mô phỏng trong Simulink rồi kết nối các khối với nhau thông qua các cổng vào ra tương ứng.

Hình 1.32 là một ví dụ chương trình mô phỏng, xây dựng một khối Simulink để tính toán kết quả của bài toán động học thuận cho một hệ nhiều vật gồm hai khâu nối tiếp với nhau bởi hai trục quay, nhận đầu vào là các tham số hình học và giá trị các biến khớp quay và đầu ra là vị trí của điểm công tác trong không gian toàn cục (hệ nhiều vật này sẽ được nhắc đến trong các chương tiếp theo của giáo trình). Ở đây ta đã sử dụng một khối "MATLAB Function" để cài đặt chương trình tính toán mô hình động học thuận cho hệ nhiều vật. Khi khai báo các đầu vào, đầu ra trong hàm tính toán chính, khối sẽ tự động cập nhật các đầu vào/ra tương ứng với tên khai báo trên cửa sổ chương trình mô phỏng như trên hình 1.34. Khối chức năng này cho phép người sử dụng viết trực tiếp hàm tính toán như trong một M-file bình thường, vì vậy được sử dụng tương đối phổ biến trong bài toán mô phỏng.



Hình 1.32. Mô phỏng bài toán động học thuận cho tay máy nối tiếp SCARA 2DOF

Các tham số đầu vào được khởi tạo từ các khối cho giá trị hằng số lấy từ thư viện cơ bản "Sources" của Simulink. Để theo dõi đáp ứng đầu ra, ta sử dụng các khối biểu diễn đồ thị trong thư viện cơ bản "Sink" của Simulink.

```
function X = DGM(Q,L1,L2)
% X = [xP;yP]
% Q = [q1;q2]
q1 = Q(1);
q2 = Q(2);
xP = L2*cos(q1 + q2) + L1*cos(q1);
yP = L2*sin(q1 + q2) + L1*sin(q1);
X = [xP;yP];
```

Lưu ý rằng, tất cả các khối tính toán trong Simulink đều chỉ làm việc với các kiểu dữ liệu ở dạng số (ví dụ, kiểu số thực, số nguyên), không chấp nhận các kiểu dữ liệu khác (như ở dạng Symbolic).

Để giải quiết một bài toán mô phỏng đối với bất cứ một phương trình toán nào (ví dụ ở dạng vi phân, tích phân…), ta đều có thể sử dụng các khối chức năng cơ bản trong Simulink để xây dựng lại hệ thống. Một trong những phương pháp hiệu quả đó là kết hợp khối chức năng "MATLAB Function" để viết lại những hệ phương trình toán phức tạp, và sử dụng các khối chức năng cơ bản khác (như đạo hàm, tích phân) để xây dựng bổ sung các phần tử phụ để hoàn thiện sơ đồ khép kín của hệ thống.

Câu hỏi ôn tập

1.1. Hãy trình bày khái niệm hệ nhiều vật?

1.2. Động lực học hệ nhiều vật giải quiết vấn đề gì?

1.3. Nêu các cách tiếp cận nghiên cứu động lực học hệ nhiều vật?

1.4. Hãy trình bày các ứng dụng của động lực học hệ nhiều vật?

1.5. Nêu khái niệm toán tử sóng?

1.6. Đạo hàm riêng của theo biến véctơ của một hàm vô hướng? Đạo hàm riêng của hàm véctơ theo biến véctơ?

1.7. Đạo hàm riêng theo biến véctơ của hàm ma trận?

1.8. Cách khai báo một véctơ, một ma trận? Cách truy cập đến một phần tử trong véctơ/ma trận?

1.9. Sự khác nhau giữa script file và hàm trong MATLAB?

1.10. Cho các véctơ và ma trận:

$$\mathbf{a}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} \qquad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 9 & 0\\5 & 1 & 8\\9 & 0 & 0\end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\7 & 8 & 0\end{bmatrix}$$

Tạo script file tính: **ab, axb, Aa, AB**

DO NOT COPY

2. Chương 2
ĐỘNG HỌC VẬT RẮN

Trong chương này, trình bày bài toán xác định vị trí, vận tốc, gia tốc của vật rắn chuyển động trong một hệ qui chiếu cố định.

2.1. XÁC ĐỊNH VỊ TRÍ VÀ HƯỚNG CỦA VẬT RẮN TRONG KHÔNG GIAN

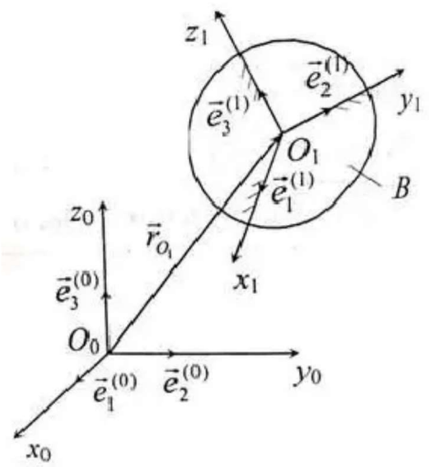
Vị trí của vật rắn ở trong không gian được xác định bởi một điểm định vị (position) và hướng (orientation) của vật rắn đối với một hệ qui chiếu đã chọn. Điểm định là một điểm xác định nào đó của vật rắn (thông thường ta hay lấy khối tâm của vật rắn làm điểm định vị).

2.1.1. Điểm định vị và hướng của vật rắn

Trên hình 2.1 mô tả chuyển động của vật rắn B đối với hệ qui chiếu cố định (hệ qui chiếu tuyệt đối) $R_0=O_0x_0y_0z_0$, trong đó hệ qui chiếu $R_1=O_1x_1y_1z_1$ được gắn chặt vào vật. Khi đó, vị trí của vật rắn B đối với hệ qui chiếu cố định R_0 được xác định bởi hai thành phần:

- Vị trí điểm định vị O_1 (Position) thuộc vật rắn B.

- Hướng (Orientation) của vật rắn đối với hệ qui chiếu R_0 (Vị trí của hệ qui chiếu R_1 đối với điểm O_1).



Hình 2.1. Hệ tọa độ gắn với vật rắn trong không gian

Vị trí của điểm O_1 được xác định trong hệ qui chiếu R_0 bởi véctơ:

$$\vec{r}_{01} = x_{01}\vec{e}_1^{(0)} + y_{01}\vec{e}_2^{(0)} + z_{01}\vec{e}_3^{(0)} \qquad (2.1)$$

Trong đó x_{01}, y_{01}, z_{01} là các toạ độ của véctơ $\vec{r}_{01}$ trong hệ qui chiếu R_0, còn $\vec{e}_1^{(0)}, \vec{e}_2^{(0)}, \vec{e}_3^{(0)}$ là các véctơ đơn vị của hệ qui chiếu R_0.

Sử dụng khái niệm về véctơ đại số đã nói đến ở chương một, từ biểu thức (2.1) ta có:

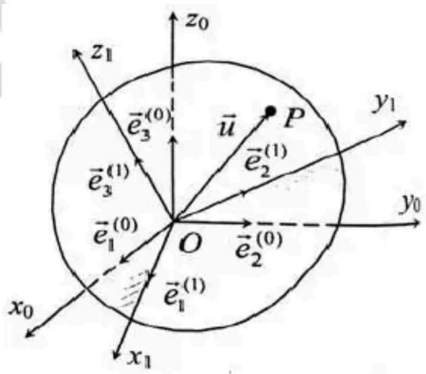
$$^{R_0}\mathrm{r}_{01} = {}^{R_0}\mathrm{r}_{01}^{(0)} = \left[x_{01}, y_{01}, z_{01}\right]^T \qquad (2.2)$$

Bài toán xác định hướng của vật rắn (xác định vị trí của hệ qui chiếu R_1 đối với điểm O_1) có thể xác định thông qua các tọa độ suy rộng: Các góc Euler; Cardan, Roll–Pitch–Yaw,… hoặc ta cũng có thể xác định vị trí của vật rắn quay quanh một điểm cố định bằng ba véctơ đơn vị $\vec{e}_1^{(1)}, \vec{e}_2^{(1)}, \vec{e}_3^{(1)}$ trên ba trục của hệ qui chiếu động R_1 gắn chặt vào vật rắn B đối với hệ qui chiếu R_0. Theo đó ta có biểu thức:

$$\begin{aligned}
\vec{e}_1^{(1)} &= a_{11}\vec{e}_1^{(0)} + a_{21}\vec{e}_2^{(0)} + a_{31}\vec{e}_3^{(0)} \\
\vec{e}_2^{(1)} &= a_{12}\vec{e}_1^{(0)} + a_{22}\vec{e}_2^{(0)} + a_{32}\vec{e}_3^{(0)} \\
\vec{e}_3^{(1)} &= a_{13}\vec{e}_1^{(0)} + a_{23}\vec{e}_2^{(0)} + a_{33}\vec{e}_3^{(0)}
\end{aligned} \qquad (2.3)$$

Trong đó, a_{1i}, a_{2i}, a_{3i} , (i=1,2,3) là các hình chiếu của véctơ đơn vị $\vec{e}_i^{(1)}$ (i=1,2,3) của hệ qui chiếu gắn với vật rắn (hệ qui chiếu động) R_1 lên các trục của hệ qui chiếu cố định R_0. Các thành phần này còn được gọi là các côsin chỉ hướng của các trục của hệ qui chiếu động R_1 đối với hệ qui chiếu cố định R_0.

2.1.2. Ma trận cosin chỉ hướng



Hình 2.2. Hướng của vật rắn trong không gian

Trên hình 2.2 mô tả chuyển động quay của vật rắn quanh một điểm cố định, trong đó 3 véctơ $\vec{e}_1^{(0)},\vec{e}_2^{(0)},\vec{e}_3^{(0)}$ là các véctơ đơn vị của hệ qui chiếu cố định R_0, 3 véctơ $\vec{e}_1^{(1)},\vec{e}_2^{(1)},\vec{e}_3^{(1)}$ là các véctơ đơn vị của hệ qui chiếu động R_1.

a) Định nghĩa ma trận côsin chỉ hướng

Từ biểu thức (2.3) ta có các côsin chỉ hướng của các trục của hệ qui chiếu động R_1 đối với hệ qui chiếu cố định R_0 được xác định như sau:

$$a_{ij} = \vec{e}_i^{(o)}.\vec{e}_j^{(1)} = \cos(\vec{e}_i^{(o)}.\vec{e}_j^{(1)}) \text{ , (i,j=1,2,3)} \qquad (2.4)$$

Khi đó, ma trận vuông cấp ba được gọi là ma trận côsin chỉ hướng của vật rắn B đối với hệ qui chiếu R_0 được xác định như sau:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \vec{e}_1^{(0)}.\vec{e}_1^{(1)} & \vec{e}_1^{(0)}.\vec{e}_2^{(1)} & \vec{e}_1^{(0)}.\vec{e}_3^{(1)} \\ \vec{e}_2^{(0)}.\vec{e}_1^{(1)} & \vec{e}_2^{(0)}.\vec{e}_2^{(1)} & \vec{e}_2^{(0)}.\vec{e}_3^{(1)} \\ \vec{e}_3^{(0)}.\vec{e}_1^{(1)} & \vec{e}_3^{(0)}.\vec{e}_2^{(1)} & \vec{e}_3^{(0)}.\vec{e}_3^{(1)} \end{bmatrix} \qquad (2.5)$$

Sử dụng biểu thức (2.4) trong biểu thức (2.5) ta xác định được ma trận côsin chỉ hướng có dạng:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad (2.6)$$

b) Ý nghĩa của ma trận côsin chỉ hướng

Trên hình 2.2 hệ qui chiếu R_0 và R_1 có cùng gốc toạ độ O. Trong đó hệ qui chiếu động R_1 được gắn chặt vào vật rắn B. Lấy một điểm P bất kỳ thuộc vật rắn B. Vị trí của điểm P được xác định bởi véctơ $\overrightarrow{OP} = \vec{u}$. Đặt toạ độ của điểm P trong hệ qui chiếu cố định R_0 là $u_1^{(0)},u_2^{(0)},u_3^{(0)}$, trong hệ qui chiếu động R_1 là $u_1^{(1)},u_2^{(1)},u_3^{(1)}$ thì ta có các biểu thức sau:

$$\vec{u} = u_1^{(0)}\vec{e}_1^{(0)} + u_2^{(0)}\vec{e}_2^{(0)} + u_3^{(0)}\vec{e}_3^{(0)} \qquad (2.7)$$

$$\vec{u} = u_1^{(1)}\vec{e}_1^{(1)} + u_2^{(1)}\vec{e}_2^{(0)} + u_3^{(1)}\vec{e}_3^{(1)} \qquad (2.8)$$

Thế dạng biểu thức (2.3) vào biểu thức (2.8) ta được:

$$\vec{u} = (a_{11}u_1^{(1)} + a_{12}u_2^{(1)} + a_{13}u_3^{(1)})\vec{e}_1^{(0)} + (a_{21}u_1^{(1)} + a_{22}u_2^{(1)} + a_{23}u_3^{(1)})\vec{e}_2^{(0)} + (a_{31}u_1^{(1)} + a_{32}u_2^{(1)} + a_{33}u_3^{(1)})\vec{e}_3^{(0)} \quad (2.9)$$

Kết hợp biểu thức (2.7) và biểu thức (2.9) ta suy ra hệ phương trình:

$$\begin{bmatrix} u_1^{(0)} \\ u_2^{(0)} \\ u_3^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_3^{(1)} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Từ biểu thức (2.10) ta có thể xác định mối quan hệ giữa véctơ đại số $u^{(0)}$ và $u^{(1)}$ như sau:

$$\mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{A}\mathbf{u}^{(1)} \quad (2.11)$$

Quan sát biểu thức (2.11) ta thấy ma trận côsin chỉ hướng **A** cho phép ta biến đổi toạ độ của điểm P tuỳ thuộc vật rắn B trong hệ qui chiếu động R_1 sang toạ độ của nó trong hệ qui chiếu cố định R_0.

Chú ý, việc xác định tọa độ của một điểm bất kỳ trong các hệ tọa độ khác nhau thông qua ma trận côsin chỉ hướng có ý nghĩa rất quan trọng, giúp chúng ta có thể giải các bài toán động học, động lực học sau này.

c) Các tính chất cơ bản của ma trận côsin chỉ hướng

Để vận dụng tốt ma trận côsin chỉ hướng vào giải các bài toán động học và động lực học của các cơ hệ ta cần hiểu rõ hơn về các tính chất cơ bản của dạng ma trận này:

Tính chất 1. Ma trận côsin chỉ hướng là ma trận trực giao.

Từ biểu thức (2.3) ta suy ra

$${}^{R_0}\mathbf{e}_1^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}, {}^{R_0}\mathbf{e}_2^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix}, {}^{R_0}\mathbf{e}_3^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Từ đó, ma trận côsin chỉ hướng dạng (2.6) có thể viết lại dưới dạng:

$$\mathrm{A} = \left[{}^{R_0}e_1^{(1)}, {}^{R_0}e_2^{(1)}, {}^{R_0}e_3^{(1)} \right] \quad (2.13)$$

DO NOT COPY

Ta nhận thấy: $AA^T = A^T A = E$ (do **A** là ma trận có ba cột là ba véctơ trực chuẩn) do đó **A** một ma trận trực giao.

Chú ý: Nếu các cột (và các hàng) của ma trận vuông **A** là các véctơ trực chuẩn thì ma trận **A** là ma trận trực giao.

Từ tính chất của ma trận trực giao ta suy ra $\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^{T}$. Do đó, từ công thức (2.11) ta có biến đổi ngược:

$$u^{(1)} = A^{-1}u^{(0)} = A^T u^{(0)} \qquad (2.14)$$

Tính chất 2: Định thức của ma trận côsin chỉ hướng bằng 1, detA = 1

Theo biểu thức tính tích hỗn hợp của ba véctơ ta có:

$$\vec{a}.(\vec{b} \text{ x } \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = |\text{a,b,c}|$$

Và công thức (2.14) ta suy ra:

$$\det A = \left|e_1^{(1)}, e_2^{(1)}, e_3^{(1)}\right| = \vec{e}_1^{(1)}.(\vec{e}_2^{(1)} \text{x } \vec{e}_3^{(1)}) \qquad (2.15)$$

Do R_1 là hệ qui chiếu thuận nên ta có:

$$\vec{e}_2^{(1)} \text{x } \vec{e}_3^{(1)} = \vec{e}_1^{(1)} \qquad (2.16)$$

Thế (2.16) vào (2.15) ta được $\det A = \vec{e}_1^{(1)}.\vec{e}_1^{(1)} = 1$

Tính chất 3. Ma trận côsin chỉ hướng có ít nhất một trị riêng bằng 1

Để chứng minh tính chất này trước hết ta chứng minh các trị riêng của ma trận côsin chỉ hướng đều có trị tuyệt đối là 1. Giả sử λ là trị riêng của ma trận A, $\vec{u}$ là véctơ riêng tương ứng. Theo khái niệm về trị riêng của một ma trận ta có:

$$A\vec{u} = \lambda\vec{u} \qquad (2.17)$$

Từ (2.17) ta có:

$$(A\vec{u}).(A\vec{u}) = (Au)^T(Au) = u^T A^T Au = u^T u = |\vec{u}|^2 \qquad (2.18)$$

Vậy:

$$|A\vec{u}| = |\vec{u}| = |\lambda| \;\; |\vec{u}| \to |\lambda| = 1 \qquad (2.19)$$

Bây giờ ta chứng minh trong ba trị riêng $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ của ma trận A có một trị riêng là 1. Theo trên ta có $|\lambda_1| = |\lambda_2| = |\lambda_3| = 1$. Do A là ma trận vuông

cấp ba với các phần tử là các số thực nên phương trình đặc trưng của nó là phương trình đại số bậc ba với hệ số thực:

$$a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0 \qquad (2.20)$$

Do đó các trị riêng của ma trận A có thể có hai khả năng:

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ là các số thực hoặc $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ có một trị riêng thực và một cặp trị riêng phức liên hợp.

Giả sử λ_1 là trị riêng thực của A. Theo (2.19) ta thấy có hai khả năng xảy ra hoặc $\lambda_1 = 1$ hoặc $\lambda_1 = -1$. Nếu $\lambda_1 = 1$, định lý được chứng minh. Nếu $\lambda_1 = -1$, ta có:

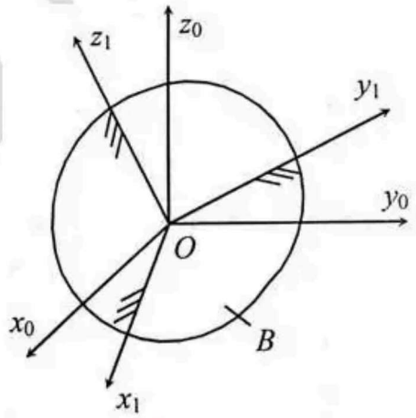
$$\det A = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1 \rightarrow \lambda_1\lambda_2 = -1 \qquad (2.21)$$

Ta thấy có hai khả năng xảy ra, hoặc λ_2, λ_3 là hai số thực, hoặc λ_2, λ_3 là hai số phức liên hợp. Nếu λ_2, λ_3 là hai số phức liên hợp ($\lambda_3 = \overline{\lambda}_2$) ta có hệ thực:

$$\lambda_2\lambda_3 = \lambda_2\overline{\lambda}_2 = |\lambda_2|^2 = 1 \qquad (2.22)$$

Hệ thức (2.22) mâu thuẫn với (2.21). Vậy λ_2, λ_3 phải là hai số thực. Do $|\lambda_2| = |\lambda_3| = 1$, $\lambda_1\lambda_2 = -1$ nên ta suy ra: hoặc $\lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$ hoặc $\lambda_2 = -1, \lambda_3 = 1$. Do đó, ta nhận thấy ma trận côsin chỉ hướng A luôn có một trị riêng bằng 1.

2.1.3. Định lý Euler



Hình 2.3. Chuyển động quay của vật rắn quanh một điểm cố định

DO NOT COPY

Trên hình 2.3 mô tả chuyển động quay của vật rắn B có một điểm O cố định. Chọn R_0=Ox$_0y_0z_0$ là hệ qui chiếu cố định, hệ qui chiếu R_1=Ox$_1y_1z_1$ là hệ qui chiếu động gắn liền vào vật rắn.

Để xác định vị trí của vật rắn B đối với hệ qui chiếu cố định ta sử dụng ma trận côsin chỉ hướng **A** (ma trận xác định vị trí của hệ qui chiếu động R_1 đối với hệ qui chiếu cố định R_0).

Định lý Euler về chuyển động quay hữu hạn của vật rắn có một điểm cố định được hiểu như sau: Ta có thể quay hệ qui chiếu R_0 sang hệ qui chiếu R_1 bằng một phép quay hữu hạn quanh trục Δ đi qua O. Hướng của trục Δ là hướng của véctơ riêng $\vec{u}$ ứng với trị riêng $\lambda = 1$ của ma trận côsin chỉ hướng **A**.

Chứng minh: Ta có λ là giá trị riêng của ma trận côsin chỉ hướng A. Xét trường hợp $\lambda = 1$, theo khái niệm về trị riêng của ma trận ta có:

$$A\vec{u} = \lambda\vec{u} = \vec{u} \qquad (2.23)$$

Gọi $\mathbf{u}^{(0)}$ là véctơ đại số của $\vec{u}$ trong hệ qui chiếu R_0, $\mathbf{u}^{(1)}$ là véctơ đại số của $\vec{u}$ trong hệ qui chiếu R_1. Từ (2.23) ta suy ra:

$$Au^{(1)} = u^{(1)} \qquad (2.24)$$

Mặt khác từ ý nghĩa của ma trận côsin chỉ hướng ta có:

$$u^{(0)} = Au^{(1)} \qquad (2.25)$$

Thế (2.24) vào (2.25) ta được:

$$u^{(0)} = Au^{(1)} = u^{(1)} \qquad (2.26)$$

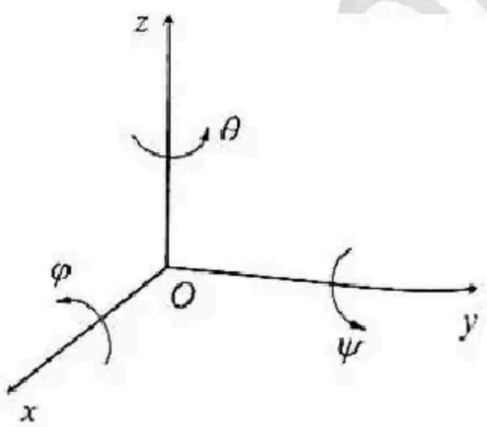
Như thế hình chiếu của véctơ $\vec{u}$ lên các trục toạ độ của hệ qui chiếu R_0 và R_1 là như nhau. Vậy véctơ $\vec{u}$ là bất biến trong phép quay hệ qui chiếu R_0 sang hệ qui chiếu R_1. Vậy $\vec{u}$ là trục quay của vật rắn trong phép quay R_0 sang R_1

Như vậy có thể coi chuyển động quay tức thời của vật rắn quanh một điểm cố định O là chuyển động quay quanh một trục quay tức thời đi qua điểm O cố định đó.

Chú ý: *C*ác chuyển động quay hữu hạn không có tính chất giao hoán: Xuất phát từ một vị trí cho trước thực hiện hai chuyển động quay theo thứ tự khác nhau, ta được vị trí cuối cùng khác nhau.

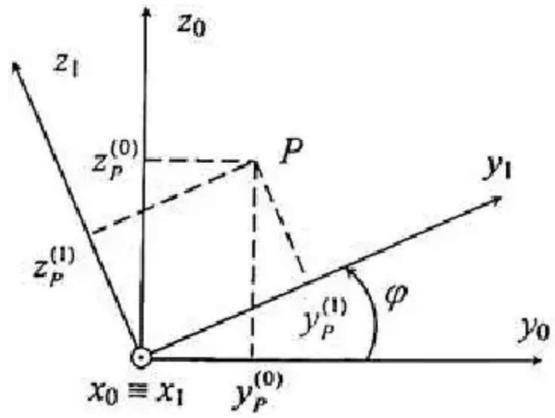
2.1.4. Các ma trận quay cơ bản

Trước khi đi vào tìm hiểu các ma trận quay cơ bản, ta qui ước hướng quay của vật rắn quanh một trục: Hướng quay dương quanh một trục là hướng quay ngược chiều kinh đồng hồ như mô tả trên hình 2.4 và ngược lại. Các phép quay quanh các trục x, y, z của hệ qui chiếu R được gọi là các phép quay cơ bản.



Hình 2.4. Chiều quay dương quanh các trục tọa độ

Trên hình 2.5 mô tả chuyển động quay của hệ qui chiếu động R_1=Ox$_1$$y_1$$z_1$ (tượng trưng hệ tọa độ động gắn với vật rắn) quay quanh trục x$_0$ trong hệ tọa độ cố định R_0=Ox$_0$$y_0$$z_0$ một góc φ.



Hình 2.5. Phép quay cơ bản quanh trục x

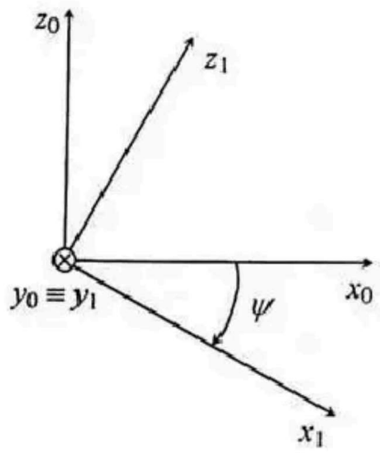
Dựa vào công thức (2.5) ta dễ dàng xác định được ma trận côsin chỉ hướng **A** như sau:

$$\mathbf{A}_x(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \qquad (2.27)$$

Ma trận (2.27) được gọi là ma trận quay cơ bản của phép quay quanh trục x_0. Khi đó, hệ thức liên hệ giữa các toạ độ của điểm P trong hệ qui chiếu cố định $R_0 \equiv \mathrm{Ox}_0 y_0 z_0$ và trong hệ qui chiếu động $R_1 \equiv \mathrm{Ox}_1 y_1 z_1$ được biểu điễn dưới dạng:

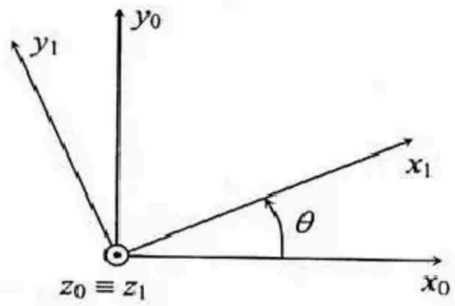
$$\begin{bmatrix} x_P^{(0)} \\ y_P^{(0)} \\ z_P^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_P^{(1)} \\ y_P^{(1)} \\ z_P^{(1)} \end{bmatrix} \qquad (2.28)$$

Bằng cách tương tự, ta xác định được ma trận quay quanh các trục y_0 và z_0 (Hình 2.6 và Hình 2.7) như sau:



Hình 2.6. Phép quay cơ bản quanh trục y

$$\mathbf{A}_y(\psi) = \begin{bmatrix} \cos\psi & 0 & \sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\psi & 0 & \cos\psi \end{bmatrix} \qquad (2.29)$$

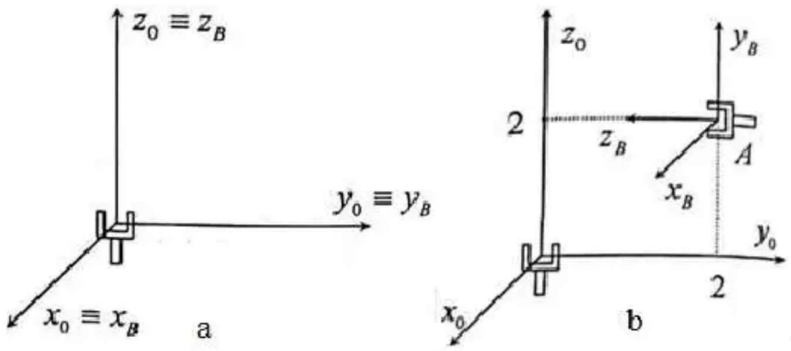


Hình 2.7. Phép quay cơ bản quanh trục z

$$\mathbf{A}_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.30)$$

Ví dụ 2.1: Xét chuyển động của một bàn kẹp tay máy: lúc đầu vị trí của hệ qui chiếu động $R_1 = \mathrm{O}x_B y_B z_B$ gắn liền với bàn kẹp tay máy trùng với vị trí của hệ qui chiếu cố định $R_0 = \mathrm{O}x_0 y_0 z_0$ (Hình 2.8a). Tại thời điểm khảo

sát vị trí của bản kẹp như trên Hình 2.8b. Hãy xác định vị trí điểm định vị và ma trận côsin chỉ hướng của bàn kẹp tay máy.



Hình 2.8. Sự di chuyển của bàn kẹp trong không gian

Giải:

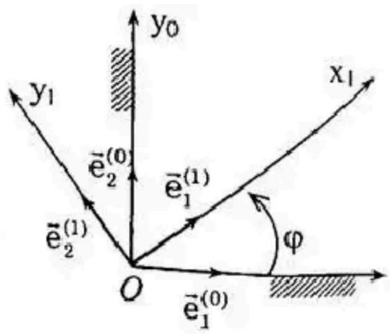
Dựa trên mô tả vị trí của bàn kẹp tay máy trên hình 2.8b ta có thể xác định vị trí điểm định vị bởi véctơ:

$$^{R_0}\mathrm{r}_A = \left[0,2,2\right]^T \qquad (2.31)$$

Bàn kẹp quay quanh trục x góc 90^0. Theo biểu thức (2.7) ta có ma trận côsin chỉ hướng của bàn kẹp có dạng:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (2.32)$$

Ví dụ 2.2: Xác định đạo hàm theo thời gian của véctơ đơn vị của hệ qui chiếu động. Cho $R_0 = x_0 y_0$ là hệ qui chiếu cố định. Véctơ đơn vị trên các trục là $\vec{e}_1^{(0)}, \vec{e}_2^{(0)}$. Cho $R_1 = Ox_1 y_1$ là hệ qui chiếu động, các véctơ đơn vị trên các trục là $\vec{e}_1^{(1)}, \vec{e}_2^{(1)}$ (Hình 2.9). Tìm đạo hàm của các véctơ đơn vị $\vec{e}_1^{(1)}, \vec{e}_2^{(1)}$ trong hệ qui chiếu cố định $R_0 = x_0 y_0$.



Hình 2.9. Tương quan giữa hệ qui chiếu R_1 với hệ qui chiếu R_0

Giải:

Theo mô tả trên hình 2.9 ta có thể coi đây là một chuyển động quay quanh một điểm cố đinh trong một mặt phẳng. Do đó ta có:

$$\begin{aligned}\vec{e}_1^{(1)} &= \cos\varphi.\vec{e}_1^{(0)} + \sin\varphi.\vec{e}_2^{(0)} \\ \vec{e}_2^{(1)} &= -\sin\varphi.\vec{e}_1^{(0)} + \cos\varphi.\vec{e}_2^{(0)}\end{aligned} \qquad (2.33)$$

Đạo hàm các véctơ trên theo thời gian ở trong hệ qui chiếu cố định $R_0 = Ox_0y_0$ ta được:

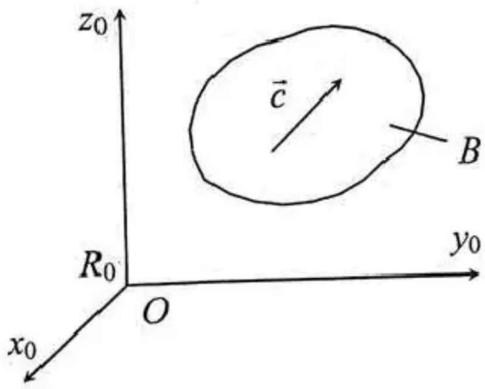
$$\begin{aligned}\frac{{}^{R_0}d\vec{e}_1^{(1)}}{dt} &= (-\sin\varphi\vec{e}_1^{(0)} + \cos\varphi\vec{e}_2^{(0)})\dot{\varphi} = \dot{\varphi}\vec{e}_2^{(1)} \\ \frac{{}^{R_0}d\vec{e}_2^{(1)}}{dt} &= -(\cos\varphi\vec{e}_1^{(0)} + \sin\varphi\vec{e}_2^{(0)})\dot{\varphi} = -\dot{\varphi}\vec{e}_1^{(1)}\end{aligned} \qquad (2.34)$$

2.2. VẬN TỐC GÓC VÀ GIA TỐC GÓC CỦA VẬT RẮN

Vận tốc góc của vận rắn có thể định nghĩa một cách trực giác là sự thay đổi theo thời gian về hướng của vật rắn.

2.2.1. Vận tốc góc của vật rắn

Trong trường hợp tổng quát, việc xem xét vận tốc góc của vận rắn như khi định nghĩa về vận tốc chất điểm là rất khó. Vì vậy, người ta cố gắng xác định vận tốc góc của vận rắn thông qua đạo hàm theo thời gian của các đại lượng đơn giản nào đó thuộc vật rắn. Ví dụ, xét một vật rắn B chuyển động đối với một hệ qui chiếu R_0 như mô tả trên hình 2.10.



Hình 2.10. Chuyển động của vật rắn B trong hệ qui chiếu R_0

Lấy $\vec{c}$ là một véctơ tuỳ ý khác không thuộc vật rắn B. Khi đó, đạo hàm của véctơ $\vec{c}$ theo thời gian được xác định tương ứng $\vec{c}.\frac{^{R_0}d\vec{c}}{dt}$. Do $(\vec{c})^2$=const nên ta có $\vec{c}.\frac{^{R_0}d\vec{c}}{dt}=0$. Từ các tính chất về tích vô hướng của hai véctơ tao thấy $^{R_0}\frac{d\vec{c}}{dt}$ là một véctơ vuông góc với véctơ $\vec{c}$. Hơn nữa khi xem xét tích có hướng $\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$ ta nhận thấy véctơ $\vec{b}$ là một véctơ vuông góc với mặt phẳng chứa $\vec{a}$ và $\vec{c}$. Từ đó, người ta xây dựng khái niệm véctơ vận tốc góc của vật rắn như sau:

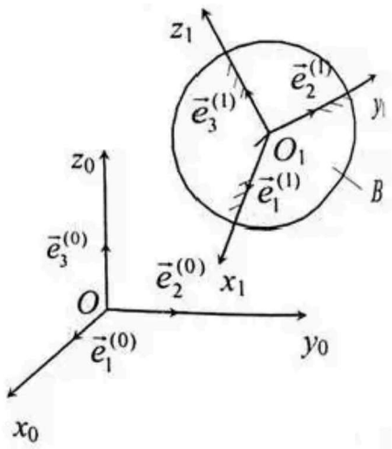
a) Định nghĩa vận tốc góc

Lấy $\vec{c}$ là một véctơ tuỳ ý khác không của vật rắn *B*. Vận tốc góc của vật rắn *B* đối với hệ qui chiếu R_0 là một véctơ, ký hiệu là $^{R_0}\vec{\omega}^B$, mà nhân véctơ với véctơ $\vec{c}$ ta được đạo hàm $^{R_0}\frac{d\vec{c}}{dt}$ hay

$$^{R_0}\frac{d\vec{c}}{dt}=^{R_0}\vec{\omega}^B\times\vec{c} \qquad (2.35)$$

2.2.2. Các định lý về vận tốc góc của vật rắn

a) Xác định vận tốc góc của vật rắn qua các véctơ đơn vị của một hệ qui chiếu động



Hình 2.11. Véctơ đơn vị gắn trên vật rắn

Trên hình 2.11. Hệ qui chiếu động R_1 gắn vào vật rắn được xác định bởi cơ sở vuông góc $R_1 = \{\vec{e}_1^{(1)}, \vec{e}_2^{(1)}, \vec{e}_3^{(1)}\}$. Khi đó, vận tốc góc của vật rắn B đối với hệ qui chiếu R_0 được xác định bởi công thức:

$$^{R_0}\vec{\omega}^B = \vec{e}_1^{(1)}\left(^{R_0}\frac{d\vec{e}_2^{(1)}}{dt}\cdot\vec{e}_3^{(1)}\right) + \vec{e}_2^{(1)}\left(^{R_0}\frac{d\vec{e}_3^{(1)}}{dt}\cdot\vec{e}_1^{(1)}\right) + \vec{e}_3^{(1)}\left(^{R_0}\frac{d\vec{e}_1^{(1)}}{dt}\cdot\vec{e}_2^{(1)}\right) \qquad (2.36)$$

Chứng minh. Trong hệ qui chiếu R_1 véctơ vận gốc của vật rắn B có thể viết dưới dạng:

$$^{R_0}\vec{\omega}^B = (^{R_0}\vec{\omega}^B.\vec{e}_1^{(1)})\vec{e}_1^{(1)} + (^{R_0}\vec{\omega}^B.\vec{e}_2^{(1)})\vec{e}_2^{(1)} + (^{R_0}\vec{\omega}^B.\vec{e}_3^{(1)})\vec{e}_3^{(1)} \qquad (2.37)$$

Mặt khác do $\vec{e}_1^{(1)}, \vec{e}_2^{(1)}, \vec{e}_3^{(1)}$ là ba véc tớ đơn vị trên ba trục của một hệ tọa độ vuông góc nên ta có công thức:

$$\vec{e}_1^{(1)} = \vec{e}_2^{(1)} \times \vec{e}_3^{(1)}, \vec{e}_2^{(1)} = \vec{e}_1^{(1)} \times \vec{e}_3^{(1)}, \vec{e}_3^{(1)} = \vec{e}_1^{(1)} \times \vec{e}_2^{(1)} \qquad (2.38)$$

Thế các biểu thức (2.38) vào (2.37) ta được:

$$
\begin{aligned}
{}^{R_0}\vec{\omega}^B &= \left[{}^{R_0}\vec{\omega}^B(\dot{e}_2^{(1)} \times \dot{e}_3^{(1)})\right]\dot{e}_1^{(1)} + \left[{}^{R_0}\vec{\omega}^B(\dot{e}_3^{(1)} \times \dot{e}_1^{(1)})\right]\dot{e}_2^{(1)} \\
&+ \left[{}^{R_0}\vec{\omega}^B(\dot{e}_1^{(1)} \times \dot{e}_2^{(1)})\right]\dot{e}_3^{(1)}
\end{aligned} \qquad (2.49)
$$

Áp dụng chất của tích hỗn hợp ba véctơ ta có:

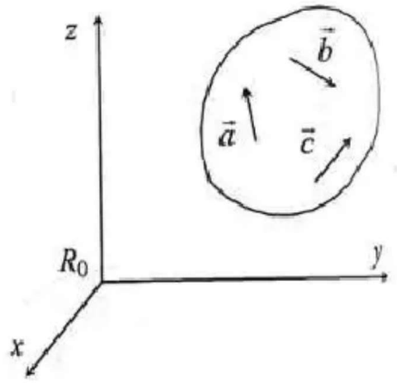
$$\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}.(\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c}.(\vec{a} \times \vec{b})$$

Và định nghĩa vận tốc góc của vật rắn (2.35), hệ thức (2.39) có dạng

$$
\begin{aligned}
{}^{R_0}\vec{\omega}^B &= \left[\vec{e}_3^{(1)}({}^{R_0}\vec{\omega}^B \times \vec{e}_2^{(1)})\right]\vec{e}_1^{(1)} + \left[\vec{e}_1^{(1)}({}^{R_0}\vec{\omega}^B \times \vec{e}_3^{(1)})\right]\vec{e}_2^{(1)} \\
&+ \left[\vec{e}_2^{(1)}({}^{R_0}\vec{\omega}^B \times \vec{e}_1^{(1)})\right]\vec{e}_3^{(1)} \\
&= \left(\vec{e}_3^{(1)}.\frac{d\dot{e}_2^{(1)}}{dt}\right)\vec{e}_1^{(1)} + \left(\vec{e}_1^{(1)}.\frac{d\dot{e}_3^{(1)}}{dt}\right)\vec{e}_2^{(1)} + \left(\vec{e}_2^{(1)}.\frac{d\dot{e}_1^{(1)}}{dt}\right)\vec{e}_3^{(1)}
\end{aligned} \qquad (2.40)
$$

Do tích vô hướng của hai véctơ có tính chất giao hoán, từ (2.40) ta suy ra công thức (2.36). Định lý được chứng minh**.**

b) Xác định vận tốc góc của vật rắn qua đạo hàm hai véctơ thuộc vật rắn



Hình 2.12. Các véctơ cố định thuộc vật rắn

Giả sử $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai véctơ khác không thuộc vật rắn B và không song song với nhau. Khi đó, vận tốc góc của vật rắn B có dạng:

$$ {}^{R_0}\vec{\omega}^{B} = \frac{\dfrac{{}^{R_0}d\vec{a}}{dt} \times \dfrac{{}^{R_0}d\vec{b}}{dt}}{\dfrac{{}^{R_0}d\vec{a}}{dt}.\vec{b}} \qquad (2.41) $$

Chứng minh. Lấy $\vec{c}$ là một véctơ tùy ý khác không của vật rắn B. Ta xây dựng một hệ qui chiếu động $R_1 = \left\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}\right\}$. Khi đó ta có thể biểu diễn véctơ $\vec{c}$ dưới dạng:

$$ \vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{a} \times \vec{b} \qquad (2.42) $$

Trong đó α, β, γ là các tọa độ của véctơ $\vec{c}$ trong hệ qui chiếu động R_1. Đạo hàm véctơ $\vec{c}$ theo thời gian ở trong hệ qui chiếu cố định R_0. Ta được:

$$ \frac{{}^{R_0}d\vec{c}}{dt} = \alpha\frac{{}^{R_0}d\vec{a}}{dt} + \beta\frac{{}^{R_0}d\vec{b}}{dt} + \gamma\left(\frac{{}^{R_0}d\vec{a}}{dt} \times \vec{b} + \vec{a} \times \frac{{}^{R_0}d\vec{b}}{dt}\right) \qquad (2.43) $$

Ta đưa ký hiệu:

$$ {}^{R_0}\vec{\omega}_1^{\,B} = \frac{\dfrac{{}^{R_0}d\vec{a}}{dt} \times \dfrac{{}^{R_0}d\vec{b}}{dt}}{\dfrac{{}^{R_0}d\vec{a}}{dt}.\vec{b}} \qquad (2.44) $$

Để chứng minh ${}^{R_0}\vec{\omega}_1^{\,B}$ bằng véctơ vận tốc góc của vật rắn B trong hệ qui chiếu R_0 ta nhân hữu hướng véctơ ${}^{R_0}\vec{\omega}_1^{\,B}$ (dạng biểu thức (2.44)) với véctơ $\vec{c}$ (dạng biểu thức (2.43)). Khi đó ta được biểu thức sau :

$$ {}^{R_0}\vec{\omega}_1^{B} \times \vec{c} = \left[\frac{\left({}^{R_0}d\vec{a}/dt\right) \times \left({}^{R_0}d\vec{b}/dt\right)}{\left({}^{R_0}d\vec{a}/dt\right).\vec{b}}\right] \times (\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{a} \times \vec{b}) \qquad (2.45) $$

Theo các tính chất của tích véctơ kép:

DO NOT COPY

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}.\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$$
$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{a}.\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}.\vec{c})\vec{a}$$

Khi đó ta có:

$$\left({}^{R_0}d\vec{a}\big/dt\right)\times\left({}^{R_0}d\vec{b}\big/dt\right)\times\vec{a}=\left[\left({}^{R_0}d\vec{a}\big/dt\right).\vec{a}\right]\left({}^{R_0}d\vec{b}\big/dt\right)-\left[\left({}^{R_0}d\vec{b}\big/dt\right).\vec{a}\right]\left({}^{R_0}d\vec{a}\big/dt\right) \quad (2.46)$$

Theo giả thiết véctơ $\vec{a}$ là một véctơ cố định thuộc vật rắn B nên $\vec{a}.\vec{a}=\text{const}$. Ta có:

$$\frac{{}^{R_0}d(\vec{a}.\vec{a})}{dt}=\frac{{}^{R_0}d\vec{a}}{dt}.\vec{a}+\vec{a}.\frac{{}^{R_0}d\vec{a}}{dt}=2\frac{{}^{R_0}d\vec{a}}{dt}.\vec{a}=0$$

Từ đó suy ra:

$$\frac{{}^{R_0}d\vec{a}}{dt}.\vec{a}=0 \quad (2.47)$$

Thế biểu thức (2.47) vào biểu thức (2.46) ta có:

$$\left({}^{R_0}d\vec{a}\big/dt\right)\times\left({}^{R_0}d\vec{b}\big/dt\right)\times\vec{a}=-\left[\left({}^{R_0}d\vec{b}\big/dt\right).\vec{a}\right]\left({}^{R_0}d\vec{a}\big/dt\right) \quad (2.485)$$

Mặt khác, do 2 véctơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ đều là 2 véctơ cố định thuộc vật rắn B nên ta cũng có $\vec{a}.\vec{b}=\text{const}$. Từ đó suy ra:

$$\frac{{}^{R_0}d\vec{a}}{dt}.\vec{b}=-\frac{{}^{R_0}d\vec{b}}{dt}.\vec{a} \quad (2.49)$$

Thế biểu thức (2.49) vào biểu thức (2.48) ta thu được:

$$\left({}^{R_0}d\vec{a}\big/dt\right)\times\left({}^{R_0}d\vec{b}\big/dt\right)\times\vec{a}=\left[\left({}^{R_0}d\vec{a}\big/dt\right).\vec{b}\right]\left({}^{R_0}d\vec{a}\big/dt\right) \quad (2.50)$$

Chia hai vế của biểu thức (2.50) cho $\frac{{}^{R_0}d\vec{a}}{dt}.\vec{b}$ ta được:

$$\left[\frac{\left({}^{R_0}d\vec{a}/dt\right)\times\left({}^{R_0}d\vec{b}/dt\right)}{\left({}^{R_0}d\vec{a}/dt\right).\vec{b}}\right]={}^{R_0}\vec{\omega}_1^{B}\times\vec{a}=\frac{{}^{R_0}d\vec{a}}{dt} \qquad (2.51)$$

Theo định nghĩa vận tốc góc của vật rắn (2.35) ta có:

$$\frac{{}^{R_0}d\vec{a}}{dt}={}^{R_0}\vec{\omega}_1^{B}\times\dot{a} \qquad (2.52)$$

Từ (2.51) và (2.52) suy ra:

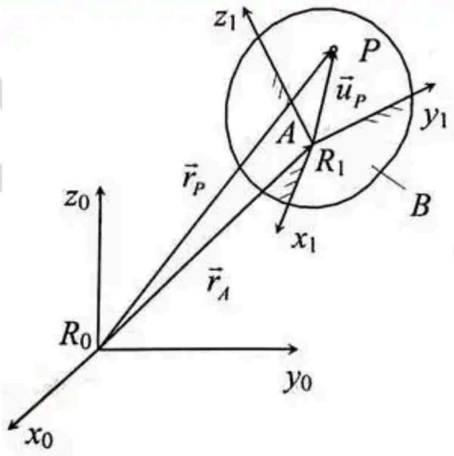
$${}^{R_0}\vec{\omega}^{B}={}^{R_0}\vec{\omega}_1^{B}=\frac{\left({}^{R_0}d\vec{a}/dt\right)\times\left({}^{R_0}d\vec{b}/dt\right)}{\left({}^{R_0}d\vec{a}/dt\right).\vec{b}} \qquad (2.53)$$

Bằng cách hoán vị vai trò của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ta có:

$${}^{R_0}\vec{\omega}^{B}=\frac{\left({}^{R_0}d\vec{b}/dt\right)\times\left({}^{R_0}d\vec{a}/dt\right)}{\left({}^{R_0}d\vec{b}/dt\right).\vec{a}} \qquad (2.54)$$

Hệ quả: Nếu biết vị trí ba điểm không thẳng hàng của vật rắn B thì ta xác định được véctơ vận tốc góc của vật rắn B.

c) Xác định vận tốc góc của vật rắn từ ma trận côsin chỉ hướng



Hình 2.13. Vận tốc của vật rắn

DO NOT COPY

Cho A là ma trận côsin chỉ hướng của vật rắn B trong hệ qui chiếu $R_0 = \{x_0 y_0 z_0\}$. Theo biểu thức (2.13) ta có:

$$A = \left[{}^{R_0}e_1^{(1)}, {}^{R_0}e_2^{(1)}, {}^{R_0}e_3^{(1)} \right] \qquad (2.55)$$

Đạo hàm biểu thức ma trận côsin chỉ hướng (2.55) theo thời gian ở trong hệ qui chiếu R_0 ta được:

$$\frac{{}^{R_0}dA}{dt} = \left[\frac{{}^{R_0}de_1^{(1)}}{dt}, \frac{{}^{R_0}de_2^{(1)}}{dt}, \frac{{}^{R_0}de_3^{(1)}}{dt} \right] \qquad (2.56)$$

Theo công thức tính vận tốc của vật rắn dạng (2.52) ta có: $\frac{{}^{R_0}de_i^{(1)}}{dt} = {}^{R_0}\vec{\omega}^B \times \vec{e}_i^{(1)}$ (i=1,2,3), đồng thời áp dụng cách tính tích véctơ của hai véctơ theo ngôn ngữ đại số (Bảng 1.2) ta có:

$$\frac{{}^{R_0}de_i^{(1)}}{dt} = \tilde{\omega}^{(0)}\, {}^{R_0}\vec{e}_i^{(1)} \qquad (i=1,2,3) \qquad (2.57)$$

Trong đó $\omega^{(0)}$ là véctơ đại số của ${}^{R_0}\vec{\omega}^B = \vec{\omega}$ trong hệ qui chiếu R_0

Thế biểu thức (2.57) vào biểu thức (2.56) ta thu được:

$$\frac{{}^{R_0}dA}{dt} = \tilde{\omega}^{(0)} \left[{}^{R_0}e_1^{(1)}, {}^{R_0}e_2^{(1)}, {}^{R_0}e_3^{(1)} \right] = \tilde{\omega}^{(0)} A \qquad (2.58)$$

Từ đó ta có công thức tính đạo hàm của ma trận côsin chỉ hướng:

$$\frac{{}^{R_0}dA}{dt} = \tilde{\omega}^{(0)} A \qquad (2.59)$$

Khi đó định lý xác định vận tốc góc của vật rắn ở trong hệ qui chiếu cố định R_0 được xác định bởi công thức:

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B^{(0)} = \dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^T \qquad (2.60)$$

Trong đó: $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B^{(0)} = \left[{}^{R_0}\omega_{x_0}^B, {}^{R_0}\omega_{y_0}^B, {}^{R_0}\omega_{z_0}^B \right]^T, \dot{\mathbf{A}} = \frac{{}^{R_0}dA}{dt}$

Để chứng minh một cách cụ thể công thức 2.60 ta chọn P là một điểm tùy ý thuộc vật rắn B. Từ hình 2.13 ta có:

$$\vec{r}_p = \vec{r}_A + \vec{u}_P \qquad (2.61)$$

Đạo hàm phương trình (2.61) theo thời gian ở trong hệ qui chiếu cố định R_0 ta được:

$$\frac{^{R_0}d\vec{r}_P}{dt} = \frac{^{R_0}d\vec{r}_A}{dt} + \vec{\omega}\times\vec{u}_P \Rightarrow \vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega}\times\vec{u}_P \qquad (2.62)$$

Trong đó $\vec{\omega} = {}^{R_0}\vec{\omega}^B$ là vận tốc góc của vật rắn.

Áp dụng công thức về tích đại số véctơ trong Bảng 1.2 phương trình (2.62) có dạng:

$$v_P^{(0)} = v_A^{(0)} + \tilde{\omega}_B^{(0)} u_P^{(0)} \qquad (2.63)$$

Tương tự phương trình (2.61) có dạng:

$$r_P^{(0)} = r_A^{(0)} + u_P^{(0)} \qquad (2.64)$$

Theo công thức (2.11) ta có:

$$u_P^{(0)} = A u_P^{(1)} \qquad (2.65)$$

Trong đó $u_P^{(0)}$ là ma trận cột gồm ba thành phần là hình chiếu của véctơ $\vec{u}_P$ trong hệ R_0, còn $u_P^{(1)}$ là ma trận cột gồm ba thành phần là có hình chiếu của véctơ $\vec{u}_P$ trong hệ R_1.

Thế (2.65) vào (2.64) ta được:

$$r_P^{(0)} = r_A^{(0)} + A u_P^{(1)} \qquad (2.66)$$

Đạo hàm phương trình (2.66) theo thời gian ở trong hệ phương trình R_0 ta được:

$$v_P^{(0)} = v_A^{(0)} + \dot{A} u_P^{(1)} \qquad (2.67)$$

DO NOT COPY

Mặt khác ta đã biết ma trận côsin chỉ hướng là ma trận trực giao nên từ hệ thức (2.65) ta có:

$$u_P^{(1)} = A^{-1}u_P^{(0)} = A^T u_P^{(0)} \tag{2.68}$$

Thế (2.68) vào (2.67) ta được:

$$v_P^{(0)} = v_A^{(0)} + \dot{A}A^T u_P^{(0)} \tag{2.69}$$

So sánh biểu thức (2.69) với (2.63) ta suy ra công thức:

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B^{(0)} = \dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^T \tag{2.70}$$

Định lý xác định vân tốc góc của vật rắn trong hệ qui chiếu động: Cho A là ma trận côsin chỉ hướng của vật rắn B đối với hệ qui chiếu cố định R_0. Khi đó, toán tử sóng của véctơ vận tốc góc của vật rắn ở trong hệ qui chiếu động R_1 gắn liền vào vật rắn B được xác định bởi công thức:

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B^{(1)} = \mathbf{A}^T\dot{\mathbf{A}} \tag{2.71}$$

Trong đó $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B^{(1)} = \left[{}^{R_0}\omega_{x_1}^B, {}^{R_0}\omega_{y_1}^B, {}^{R_0}\omega_{z_1}^B\right]^T, \dot{\mathbf{A}} = \dfrac{{}^{R_0}dA}{dt}$.

Chứng minh. Từ phương trình (2.63) ta suy ra:

$$v_P^{(1)} = v_A^{(1)} + \tilde{\omega}_B^{(1)}u_P^{(1)} \tag{2.72}$$

Nhân hai vế của phương trình (2.72) với A ta được:

$$Av_P^{(1)} = Av_A^{(1)} + A\tilde{\omega}_B^{(1)}u_P^{(1)} \tag{2.73}$$

Áp dụng biểu thức (2.11) vào biểu thức (2.73) ta có:

$$v_P^{(0)} = v_A^{(0)} + A\tilde{\omega}_B^{(1)}u_P^{(1)} \tag{2.74}$$

So sánh công thức (2.72) với công thức (2.67) ta suy ra:

$$\dot{\mathbf{A}} = A\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B^{(1)} \Rightarrow \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B^{(1)} = \mathbf{A}^T\dot{\mathbf{A}} \tag{2.75}$$

2.2.3. Gia tốc góc của vật rắn

a) Định nghĩa gia tốc góc

Gia tốc góc của vật rắn B đối với hệ qui chiếu R_0 là một đại lượng véctơ, ký hiệu là ${}^{R_0}\vec{\alpha}^B$, bằng đạo hàm theo thời gian ở trong hệ qui chiếu R_0 của véctơ vận tốc góc của vật rắn B.

$$ {}^{R_0}\vec{\alpha}^B = \frac{{}^{R_0}d}{dt}({}^{R_0}\vec{\omega}^B) \qquad (2.76) $$

Chú ý: Khi khảo sát chuyển động của một vật rắn đối với một hệ qui chiếu, ta có thể bỏ các chỉ số trên ở trong các bảng ký hiệu vận tốc góc và gia tốc góc và viết một cách ngắn gọn là $\vec{\omega}$ và $\vec{\alpha}$.

- *Định lý:* Trong hệ qui chiếu R_1 gắn liền vào vật rắn B, nếu véctơ vận tốc góc của vật rắn được biểu diễn dưới dạng:

$$ {}^{R_0}\vec{\omega}^B = \omega_1^{(1)}\vec{e}_1^{(1)} + \omega_2^{(1)}\vec{e}_2^{(1)} + \omega_3^{(1)}\vec{e}_3^{(1)} $$

Khi đó, biểu thức tính gia tốc góc của vật rắn có dạng như sau:

$$ {}^{R_0}\vec{\alpha}^B = \dot{\omega}_1^{(1)}\vec{e}_1^{(1)} + \dot{\omega}_2^{(1)}\vec{e}_2^{(1)} + \dot{\omega}_3^{(1)}\vec{e}_3^{(1)} \qquad (2.77) $$

Chứng minh. Theo định nghĩa gia tôc góc (2.76) ta có:

$$ \begin{aligned} {}^{R_0}\vec{\alpha}^B &= \frac{{}^{R_0}d}{dt}({}^{R_0}\vec{\omega}^B) = \frac{{}^{R_0}d}{dt}(\omega_1^{(1)}\vec{e}_1^{(1)} + \omega_2^{(1)}\vec{e}_2^{(1)} + \omega_3^{(1)}\vec{e}_3^{(1)}) \\ &= \dot{\omega}_1^{(1)}\vec{e}_1^{(1)} + \dot{\omega}_2^{(1)}\vec{e}_2^{(1)} + \dot{\omega}_3^{(1)}\vec{e}_3^{(1)} + \omega_1^{(1)}\frac{{}^{R_0}d\vec{e}_1^{(1)}}{dt} + \omega_2^{(1)}\frac{{}^{R_0}d\vec{e}_2^{(1)}}{dt} + \omega_3^{(1)}\frac{{}^{R_0}d\vec{e}_3^{(1)}}{dt} \end{aligned} \qquad (2.78) $$

Do $\frac{{}^{R_0}d\vec{e}_i^{(1)}}{dt} = {}^{R_0}\vec{\omega}^B \times \vec{e}_i^{(1)}$ (i=1,2,3) nên ta có:

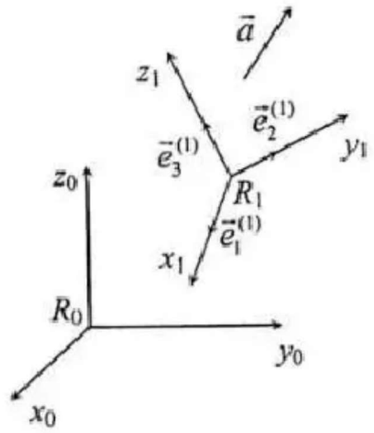
$$ \begin{aligned} &{}^{R_0}\vec{\alpha}^B\omega_1^{(1)}\frac{{}^{R_0}d\vec{e}_1^{(1)}}{dt} + \omega_2^{(1)}\frac{{}^{R_0}d\vec{e}_2^{(1)}}{dt} + \omega_3^{(1)}\frac{{}^{R_0}d\vec{e}_3^{(1)}}{dt} \\ &= {}^{R_0}\vec{\omega}^B \times (\omega_1^{(1)}\vec{e}_1^{(1)} + \omega_2^{(1)}\vec{e}_2^{(1)} + \omega_3^{(1)}\vec{e}_3^{(1)}) \\ &= {}^{R_0}\vec{\omega}^B \times {}^{R_0}\vec{\omega}^B = 0 \end{aligned} \qquad (2.79) $$

Thế (2.79) vào (2.78) ta được:

$$ {}^{R_0}\vec{\alpha}^{B} = \frac{{}^{R_0}d}{dt}({}^{R_0}\vec{\omega}^{B}) = \dot{\omega}_1^{(1)}\vec{e}_1^{(1)} + \dot{\omega}_2^{(1)}\vec{e}_2^{(1)} + \dot{\omega}_3^{(1)}\vec{e}_3^{(1)} \qquad (2.80) $$

2.3. CỘNG VẬN TỐC GÓC VÀ GIA TỐC GÓC

2.3.1. Đạo hàm của vectơ trong hệ qui chiếu động



Hình 2.14. Đạo hàm véctơ trong hệ qui chiếu động

Trên hình 2.14 mô tả véctơ $\vec{a}$ thay đổi theo thời gian ở trong hệ qui chiếu động R_1. Hệ qui chiếu động R_1 lại chuyển động đối với hệ qui chiếu cố định R_0. Ba véctơ $\vec{e}_1^{(1)}, \vec{e}_2^{(1)}, \vec{e}_3^{(1)}$ là ba véctơ đơn vị trong hệ qui chiếu động R_1. Ta có thể biểu diễn véctơ $\vec{a}$ như sau:

$$ \vec{a} = a_1^{(1)}\vec{e}_1^{(1)} + a_2^{(1)}\vec{e}_2^{(1)} + a_3^{(1)}\vec{e}_3^{(1)} \qquad (2.81) $$

Trong đó $a_i^{(1)}$ (i=1,2,3) là các tọa độ của véctơ $\vec{a}$ trong hệ qui chiếu R_1. Đạo hàm hệ thức (2.81) theo thời gian ở trong hệ qui chiếu R_0 ta được:

$$ \begin{aligned} \frac{{}^{Ro}d\vec{a}}{dt} &= \frac{da_1^{(1)}}{dt}\vec{e}_1^{(1)} + \frac{da_2^{(1)}}{dt}\vec{e}_2^{(1)} + \frac{da_3^{(1)}}{dt}\vec{e}_3^{(1)} + a_1^{(1)}\frac{{}^{Ro}d\vec{e}_1^{(1)}}{dt} \\ &+ a_2^{(1)}\frac{{}^{Ro}d\vec{e}_2^{(1)}}{dt} + a_3^{(1)}\frac{{}^{Ro}d\vec{e}_3^{(1)}}{dt} \end{aligned} \qquad (2.82) $$

Theo công thức về vận tốc góc ta lại có:

$$ \frac{{}^{Ro}d\vec{e}_1^{(1)}}{dt} = {}^{Ro}\vec{\omega}^{R_1} \times \vec{e}_1^{(1)}, \quad \frac{{}^{Ro}d\vec{e}_2^{(1)}}{dt} = {}^{Ro}\vec{\omega}^{R_1} \times \vec{e}_2^{(1)}, \quad \frac{{}^{Ro}d\vec{e}_3^{(1)}}{dt} = {}^{Ro}\vec{\omega}^{R_1} \times \vec{e}_3^{(1)} \qquad (2.83) $$

Thế (2.83) vào (2.82) ta được:

$$\frac{^{Ro}d\vec{a}}{dt} = \frac{^{R_1}d\vec{a}}{dt} + {}^{Ro}\vec{\omega}^{R_1} \times \vec{a} \qquad (2.84)$$

2.3.2. Công thức cộng vận tốc góc

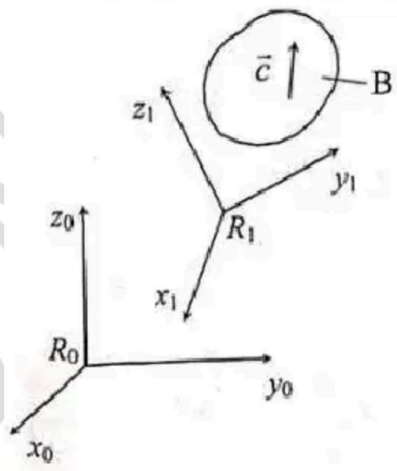
Cho môt véctơ $\vec{c} \neq 0$ tuỳ ý của vật rắn B. Vật rắn B chuyển động đối với hệ qui chiếu R_1, hệ qui chiếu R_1 lại chuyển động đối với hệ qui chiếu R_0. Theo định nghĩa vận tốc góc ta có các công thức:

$$\frac{^{R_0}d\vec{c}}{dt} = {}^{R_0}\vec{\omega}^{B} \times \vec{c} \qquad (2.85)$$

$$\frac{^{R_1}d\vec{c}}{dt} = {}^{R_1}\vec{\omega}^{B} \times \vec{c} \qquad (2.86)$$

Mặt khác, từ công thức (2.84) ta có phương trình:

$$\frac{^{R_0}d\vec{c}}{dt} = \frac{^{R_1}d\vec{c}}{dt} + {}^{R_0}\vec{\omega}^{R_1} \times \vec{c} \qquad (2.87)$$



Hình 2.15. Vật rắn trong hệ qui chiếu động

Thế biểu thức (2.85) và (2.86) vào phương trình (2.87) ta được

$${}^{R_0}\vec{\omega}^{B} \times \vec{c} = {}^{R_1}\vec{\omega}^{B} \times \vec{c} + {}^{R_0}\vec{\omega}^{R_1} \times \vec{c} = ({}^{R_1}\vec{\omega}^{B} + {}^{R_0}\vec{\omega}^{R_1}) \times \vec{c} \qquad (2.88)$$

Từ (2.88) suy ra công thức cộng vận tốc góc của vật rắn:

$$^{R_0}\vec{\omega}^B = {}^{R_1}\vec{\omega}^B + {}^{R_0}\vec{\omega}^{R_1} \qquad (2.89)$$

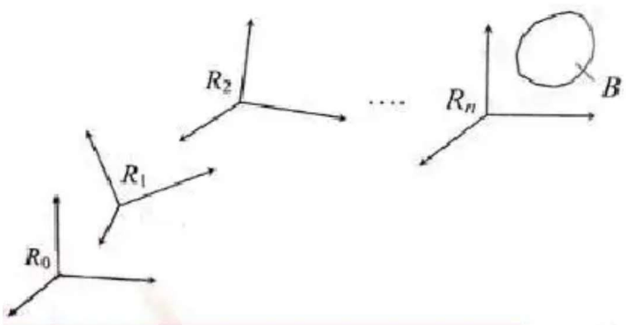
Người ta qui ước chuyển động của vật rắn B đối với hệ qui chiếu động R_1 được gọi là chuyển động tương đối ${}^{R_1}\vec{\omega}^B = \vec{\omega}_r$, chuyển động của vật rắn B đối với hệ qui chiếu cố định R_0 được gọi là chuyển động tuyệt đối ${}^{R_0}\vec{\omega}^B = \vec{\omega}_a$. Chuyển động của hệ qui chiếu động R_1 đối với hệ qui chiếu cố định R_0 được gọi là chuyển động theo ${}^{R_0}\vec{\omega}^{R_1} = \vec{\omega}_e$. Khi đó biểu thức (2.89) có dạng:

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r \qquad (2.90)$$

Định lý. Ở mỗi thời điểm,vận tốc góc tuyệt đối của vật rắn B bằng tổng hình học vận tốc góc tương đối và vận tốc góc theo của nó.

Áp dụng công thức (2.90) ta có thể xác định vận tốc góc của vật rắn trong một chuỗi hệ tọa độ động nối tiếp.

Trên hình 2.16 mô tả vật rắn B chuyển động trong n+1 hệ tọa độ nối tiếp từ R_0 tới R_n.



Hình 2.16. Vận rắn trong hệ các tọa động động nối tiếp

Áp dụng liên tiếp công thức (2.89) ta có:

$$^{R_0}\vec{\omega}^B = {}^{R_0}\vec{\omega}^{R_1} + {}^{R_1}\vec{\omega}^{R_2} + \ldots + {}^{R_{n-1}}\vec{\omega}^{R_n} + {}^{R_n}\vec{\omega}^B \qquad (2.91)$$

R1wR2

2.3.3. Công thức cộng gia tốc góc

Để xác định công thức cộng gia tốc góc của vật rắn ta lấy đạo hàm theo thời gian công thức (2.89) ở trong hệ qui chiếu R_0:

$$\frac{d}{dt}({}^{R_0}\vec{\omega}^{B}) = \frac{d}{dt}({}^{R_0}\vec{\omega}^{R_1}) + \frac{d}{dt}({}^{R_1}\vec{\omega}^{B}) \qquad (2.92)$$

Thay thế dạng công thức (2.84) vào biểu thức (2.92) ta có:

$${}^{R_0}\vec{\alpha}^{B} = {}^{R_0}\vec{\alpha}^{R_1} + \frac{d}{dt}({}^{R_1}\vec{\omega}^{B}) + {}^{R_0}\vec{\omega}^{R_1} \times {}^{R_1}\vec{\omega}^{B} \qquad (2.93)$$

Từ định nghĩa chuyển động tuyệt đối, tương đối vào theo của vật rắn ta suy ra:

$${}^{R_0}\vec{\alpha}^{B} = \vec{\alpha}_a, {}^{R_1}\vec{\alpha}^{B} = \vec{\alpha}_r, {}^{R_0}\vec{\alpha}^{R_1} = \vec{\alpha}_e \qquad (2.94)$$

Thế (2.94) vào (2.93) ta được

$$\vec{\alpha}_a = \vec{\alpha}_e + \vec{\alpha}_r + \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r \qquad (2.95)$$

Định lý. Ở mỗi thời điểm gia tốc góc tuyệt đối của vật rắn B bằng tổng hình học gia tốc góc tương đối, gia tốc góc theo và gia tốc góc phụ $\vec{\alpha}_p = \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r$ của vật rắn. Gia tốc phụ $\vec{\alpha}_p = \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r$ còn được gọi là gia tốc góc Resal.

2.4. CÁC TỌA ĐỘ SUY RỘNG XÁC ĐỊNH HƯỚNG CỦA VẬT RẮN

Chúng ta đã biết bài toán xác định vị trí của hệ qui chiếu động R_1 được gọi là bài toán xác định hướng của vật rắn. Về thực chất, đây là bài toán xác định vị trí của vật rắn quay quanh một điểm cố định.

Các toạ độ suy rộng xác định vị trí của vật rắn quay quanh một điểm cố định thường được sử dụng là: Các góc Euler, các góc Cardan, các góc Roll-Pitch-Yaw,...

2.4.1. Các góc Euler

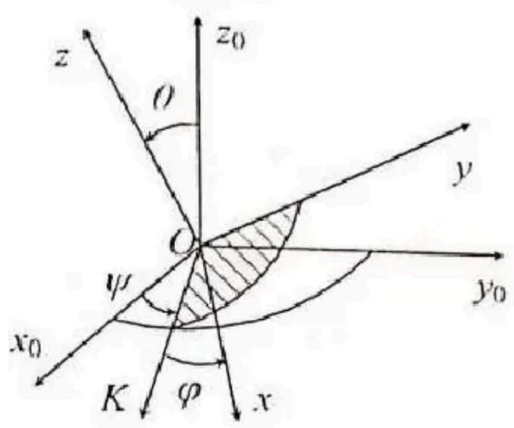
a) Xác định ma trận côsin chỉ hướng từ các góc Euler

Ta xét một vật rắn B quay quanh điểm O cố định được xác định bởi vị trí của hệ qui chiếu động Oxyz (gắn chặt vào vật rắn B) đối với hệ qui chiếu cố định $Ox_0y_0z_0$. Giả sử giao của mặt phẳng Ox_0y_0 (mặt phẳng trong

DO NOT COPY

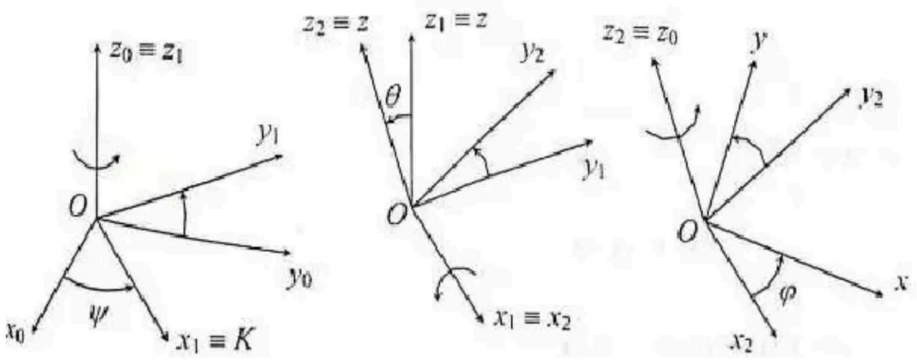
hệ qui chiếu cố định) và mặt phẳng Oxy (mặt phẳng trong hệ qui chiếu động) là đường OK. Trục OK này được gọi là đường nút (Hình 2.17).

Gọi góc giữa trục Ox_0 và OK là ψ, góc giữa Oz_0 và Oz là θ; góc giữa trục OK và Ox là φ. Khi đó ba góc ψ, θ, φ được gọi là ba góc Euler.



Hình 2.17. Các góc Euler

Sử dụng các góc Euler ta có thể quay hệ qui chiếu $Ox_0y_0z_0$ sang hệ qui chiếu Oxyz bằng ba phép quay cơ bản như thể hiện trên hình 2.18.



Hình 2.18. Các phép quay theo 3 góc Euler

Bước 1: Quay hệ qui chiếu $R_0=Ox_0y_0z_0$ quanh trục Oz_0 bằng một góc ψ để trục Ox_0 chuyển tới đường nút OK. Với phép quay này, hệ qui chiếu $Ox_0y_0z_0$ chuyển sang hệ qui chiếu $R_1=Ox_1y_1z_1$ với $Oz_0 \equiv Oz_1$.

Bước 2: Quay hệ qui chiếu R_1=$Ox_1y_1z_1$ quanh trục $Ox_1 \equiv OK$ một góc θ để trục Oz_1 chuyển tới trục $Oz_2 \equiv Oz$. Hệ qui chiếu $Ox_1y_1z_1$ chuyển sang hệ qui chiếu $Ox_2y_2z_2$ với $Ox_1 \equiv Ox_2 \equiv OK$.

Bước 3: Quay hệ qui chiếu R_2=$Ox_2y_2z_2$ quanh trục $Oz_2 \equiv Oz$ một góc φ để trục $Ox_2 \equiv OK$ chuyển tới trục Ox. Với phép quay này, hệ qui chiếu $Ox_2y_2z_2$ chuyển sang hệ qui chiếu Oxyz với $Oz_2 \equiv Oz$.

Như thế, bằng ba phép quay Euler quanh trục Oz_0 một góc ψ , quanh trục OK một góc θ, quanh trục Oz một góc φ, hệ qui chiếu $Ox_0y_0z_0$ chuyển sang hệ qui chiếu Oxyz. Thứ tự của các trục quay là z-x-z. Các ma trận quay ứng với phép quay Euler có dạng:

$$A_{z_0}(\psi) = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.96)$$

$$A_K(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \qquad (2.97)$$

$$A_z(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.98)$$

Trên hình 2.17 biểu diễn đồng thời ba phép quay Euler. Ma trận quay hệ qui chiếu $Ox_0y_0z_0$ sang hệ qui chiếu Oxyz bằng ba phép quay Euler gọi là ma trận quay Euler. Ký hiệu là A_E. Ma trận này cũng chính là ma trận côsin chỉ hướng của hệ qui chiếu Oxyz đối với hệ qui chiếu $Ox_0y_0z_0$.

Để khảo sát phép quay Euler ta lấy một điểm P bất kỳ thuộc vật rắn B. Khi đó tương quan tọa độ điểm P trong hệ qui chiếu động và qui chiếu cố định được xác định theo công thức:

DO NOT COPY

$$\begin{bmatrix} x_P^{(0)} \\ y_P^{(0)} \\ z_P^{(0)} \end{bmatrix} = A_E \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{bmatrix} \qquad (2.99)$$

Theo ký hiệu $x_P^{(i)}, y_P^{(i)}, z_P^{(i)}$ là toạ độ điểm P trong hệ qui chiếu R_i=Ox$_i y_i z_i$ (i= 1,2,3) tương ứng với hệ qui chiếu khi thực hiện 3 phép quay Euler. Ta có các hệ thức sau:

$$\begin{bmatrix} x_P^{(2)} \\ y_P^{(2)} \\ z_P^{(2)} \end{bmatrix} = A_Z(\varphi) \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_P^{(1)} \\ y_P^{(1)} \\ z_P^{(1)} \end{bmatrix} = A_K(\theta) \begin{bmatrix} x_P^{(2)} \\ y_P^{(2)} \\ z_P^{(2)} \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} x_P^{(0)} \\ y_P^{(0)} \\ z_P^{(0)} \end{bmatrix} = A_{z_0}(\psi) \begin{bmatrix} x_P^{(1)} \\ y_P^{(1)} \\ z_P^{(1)} \end{bmatrix} \qquad (2.100)$$

Từ (2.100) ta suy ra:

$$\begin{bmatrix} x_P^{(0)} \\ y_P^{(0)} \\ z_P^{(0)} \end{bmatrix} = A_{z_0}(\psi) A_K(\theta) A_z(\varphi) \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{bmatrix} \qquad (2.101)$$

So sánh (2.99) với (2.101) ta suy ra:

$$A_E = A_{z_0}(\psi) A_K(\theta) A_z(\varphi) \qquad (2.102)$$

Thế các ma trận (2.96), (2.97) và (2.98) vào hệ thức (2.102) ta được ma trận côsin chỉ hướng (hoặc còn gọi là ma trận quay) Euler:

$$A_E = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\cos\theta\sin\varphi & -\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\theta\cos\varphi & \sin\psi\sin\theta \\ \sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\cos\theta\sin\varphi & -\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\theta\cos\varphi & -\cos\psi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta \end{bmatrix} \qquad (2.103)$$

b) Xác định các góc Euler từ ma trận côsin chỉ hướng

Giả sử biết được ma trận côsin chỉ hướng của hệ qui chiếu động Oxyz đối với hệ qui chiếu cố định $Ox_0y_0z_0$.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad (2.104)$$

So sánh các phần tử của ma trận (2.103) với các phần tử của ma trận (2.104) ta suy ra:

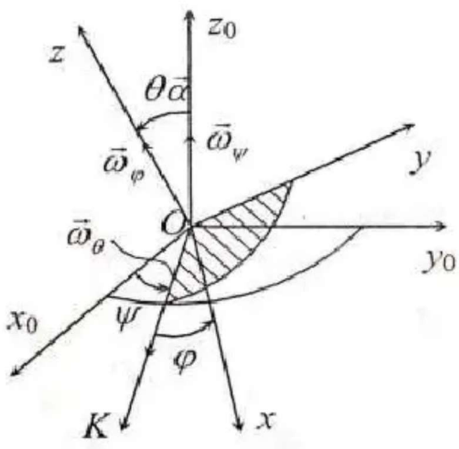
$$\begin{aligned} &\cos\theta = a_{33}, \quad \sin\theta = \pm\sqrt{1-\cos^2\theta} \\ &\cos\psi = -\frac{a_{23}}{\sin\theta}, \quad \sin\psi = \frac{a_{13}}{\sin\theta} \\ &\cos\varphi = \frac{a_{32}}{\sin\theta}, \quad \sin\varphi = \frac{a_{31}}{\sin\theta} \end{aligned} \qquad (2.105)$$

Từ các công thức (2.105) ta thấy $\theta \approx k\pi$ (k=0,1,2,...) thì $\cos^2\theta \approx 1, \sin\theta \approx 0$. Giá trị này của góc θ được gọi là giá trị tới hạn. Khi đó việc tính toàn bằng số sẽ rất khó khăn.

c) Xác định vận tốc góc của vật rắn từ các góc Euler

Nếu ta sử dụng ba góc quay Euler ψ, θ, φ để xác định vị trí của vật rắn B quay quanh một điểm O cố định thì ta có thể quay hệ qui chiếu cố định R_0=$Ox_0y_0z_0$ sang hệ qui chiếu động R_1=Oxyz bằng ba phép quay Euler (Hình 2.19).

DO NOT COPY



Hình 2.19. Xác định vận tốc góc từ 3 góc Euler

Do đó, theo định lý cộng vận tốc góc, ta có công thức:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_\psi + \vec{\omega}_\theta + \vec{\omega}_\varphi \qquad (2.106)$$

Dưới dạng ma trận cột các véctơ vận tốc góc thành phần $\vec{\omega}_\psi, \vec{\omega}_\theta, \vec{\omega}_\varphi$ có dạng (Hình 2.18)

$$\omega_\psi^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \Rightarrow \omega_\psi^{(1)} = A_E^T \omega_\psi^{(0)} = \begin{bmatrix} \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi \\ \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi \\ \dot{\psi}\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\omega_\theta^{(0)} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}\cos\psi \\ \dot{\theta}\sin\psi \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \omega_\theta^{(1)} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}\cos\varphi \\ \dot{\theta}\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (2.107)$$

$$\omega_\varphi^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} \Rightarrow \omega_\varphi^{(0)} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}\sin\psi\sin\theta \\ -\dot{\varphi}\cos\psi\sin\theta \\ \dot{\varphi}\cos\theta \end{bmatrix}$$

Chiếu đẳng thức (2.107) lên các trục của hệ toạ độ cố định $R_0 = Ox_0y_0z_0$ ta được :

$$\omega^{(0)} = \begin{bmatrix} \omega_x^{(0)} \\ \omega_y^{(0)} \\ \omega_z^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cos\psi & \sin\psi\sin\theta \\ 0 & \sin\psi & \cos\psi\sin\theta \\ 1 & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} \qquad (2.108)$$

Từ phương trình (2.108) ta có thể giải ra:

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sin\theta} \begin{bmatrix} -\sin\psi\cos\theta & \cos\psi\cos\theta & \sin\theta \\ \cos\psi\sin\theta & \sin\psi\sin\theta & 0 \\ \sin\psi & -\cos\psi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x^{(0)} \\ \omega_y^{(0)} \\ \omega_z^{(0)} \end{bmatrix} \qquad (2.109)$$

Phương trình (2.109) được gọi là phương trình vi phân động học. Khi $\theta = 0, \pm\pi$, biểu thức (2.109) không có nghĩa. Việc mô tả chuyển động quay của vật rắn quanh một điểm cố định là "kỳ dị" khi $\theta = 0, \pm\pi$.

Chiếu đẳng thức véctơ (2.108) lên các trục của hệ toạ độ động R_1=Oxyz ta được:

$$\omega^{(1)} = \begin{bmatrix} \omega_x^{(1)} \\ \omega_y^{(1)} \\ \omega_z^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \sin\theta\cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \cos\theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} \qquad (2.110)$$

Từ phương trình này, ta dễ dàng xác định được phương trình vi phân động học:

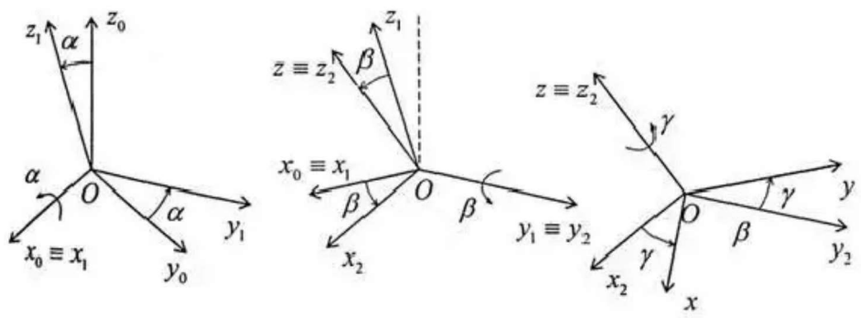
$$\begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sin\theta} \begin{bmatrix} \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \sin\theta\cos\varphi & -\sin\theta\sin\varphi & 0 \\ -\cos\theta\sin\varphi & -\cos\theta\cos\varphi & \sin\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \qquad (2.111)$$

2.4.2. Các góc Cardan

a) Xác định ma trận côsin chỉ hướng từ các góc Cardan

Các góc Cardan (có tài liệu gọi là các góc Bryant) là các góc được xác định bởi phép quay Cardan. Ta quay hệ qui chiếu cố định $Ox_0y_0z_0$ sang hệ qui chiếu động Oxyz (gắn chặt vào vật rắn B) bằng ba phép quay quanh Cardan quanh trục x, y, z với các góc α, β, γ như sau (Hình 2.20).

DO NOT COPY



Hình 2.20. Các góc Cardan

Quay hệ R_0=$Ox_0y_0z_0$ quanh trục Ox_0 được một góc α. Hệ $Ox_0y_0z_0$ chuyển thành hệ $Ox_1y_1z_1$ với $Ox_0 \equiv Ox_1$.

Quay hệ $Ox_1y_1z_1$ quanh trục Oy_1 một góc β để trục Oz_1 chuyển tới trục $Oz_2 = Oz$. Hệ $Ox_1y_1z_1$ chuyển thành hệ $Ox_2y_2z_2$ với $Oy_1 \equiv Oy_2$.

Quay hệ $Ox_2y_2z_2$ quanh trục $Oz_2 \equiv Oz$ một góc γ để trục Ox_2 chuyển tới trục O_x. Hệ $Ox_2y_2z_2$ chuyển thành hệ $Oxyz$ với $Oz_2 \equiv Oz$.

Các góc α, β, γ được gọi là các góc Cardan (hoặc các góc Bryant). Thứ tự thực hiện các trục quay x-y-z. Các ma trận quay tương ứng với phép quay Cardan có dạng:

$$A_{x0}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} A_{y1}(\beta) = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}$$

$$A_z(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.112)$$

Ma trận Cardan từ hệ qui chiếu $Ox_0y_0z_0$ chuyển sang hệ qui chiếu $Oxyz$ là $A_C = A_{x0}(\alpha), A_{y1}(\beta), A_z(\gamma)$ ta được ma trận côsin chỉ hướng:

$$A_c = \begin{bmatrix} \cos\beta\cos\gamma & -\cos\beta\sin\gamma & \sin\beta \\ \cos\alpha\sin\gamma + \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma & \cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma & -\sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\sin\gamma - \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma & \sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma & \cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix} \quad (2.113)$$

b) Xác định các góc Cardan từ ma trận côsin chỉ hướng

Tương tự phần trên, nếu biết ma trận côsin chỉ hướng của hệ qui chiếu động Oxyz đối với hệ qui chiếu $Ox_0y_0z_0$, bằng cách so sánh các phần tử tương ứng của hai ma trận (2.105) và ma trận (2.112) ta suy ra:

$$\begin{aligned} &\sin\beta = a_{13}, \quad \cos\beta = \pm\sqrt{1-\sin^2\beta} \\ &\sin\alpha = -\frac{a_{23}}{\cos\beta}, \quad \cos\alpha = \frac{a_{33}}{\cos\beta} \\ &\sin\gamma = -\frac{a_{12}}{\cos\beta}, \quad \cos\gamma = \frac{a_{11}}{\cos\beta} \end{aligned} \quad (2.114)$$

Khi $\beta \approx (2n+1)\frac{\pi}{2}$ (n=0,1,2,...) thì $\sin^2\beta \approx 1, \cos\beta \approx 0$. Giá trị này của góc β được gọi là giá trị tới hạn.

Chú ý: Khi phép quay của vật rắn đủ nhỏ, các góc α, β, γ nói chung là nhỏ. Do đó, ta có thể sử dụng các xấp xỉ $\sin\alpha \approx \alpha$, $\cos\alpha \approx 1$, $\sin\beta \approx \beta$, $\cos\beta \approx 1$, $\sin\gamma \approx \gamma$, $\cos\gamma \approx 1$. Trong trường hợp này ma trận côsin chỉ hướng (2.108) có thể thay thế gần đúng bằng ma trận:

$$A_C = \begin{bmatrix} 1 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 1 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 1 \end{bmatrix} = E + \tilde{\varphi} \quad (2.115)$$

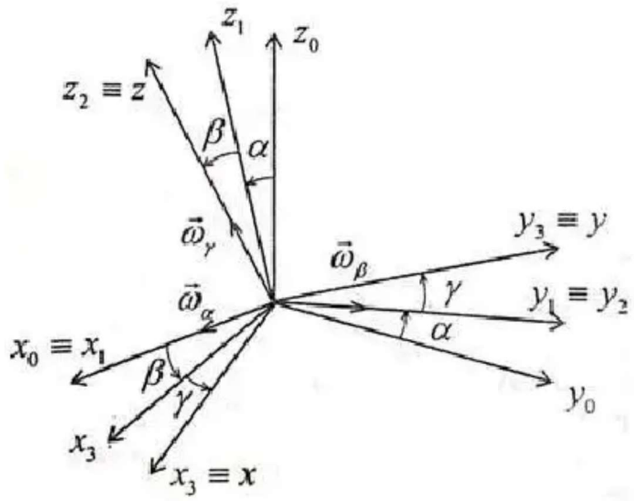
Trong đó $\varphi = [\alpha, \beta, \gamma]^T$, $\tilde{\varphi}$ là toán tử sóng của φ.

Nếu sử dụng các góc Euler, tuy phép quay nhỏ nhưng các góc Euler ψ, θ, φ có thể không nhỏ. Vì vậy trong các bài toán doa động người ta ít khi sử dụng các góc Euler.

c) Xác định vận tốc góc của vật rắn từ các góc Cardan

DO NOT COPY

Nếu ta sử dụng ba góc quay Cardan α, β, γ để xác định vi trí của vật rắn B quay quanh một điểm O cố định thì ta có thể quay hệ qui chiếu cố định $Ox_0y_0z_0$ sang hệ qui chiếu động Oxyz bằng ba phép quay Cardan (Hình 2.21).



Hình 2.21. Ba góc quay Cardan

Theo định lý cộng vận tốc góc ta có:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_\alpha + \vec{\omega}_\beta + \vec{\omega}_\gamma \qquad (2.116)$$

Chiếu (2.116) lên các trục của hệ qui chiếu cố định $Ox_0y_0z_0$ ta được:

$$^{R_0}\omega_\alpha = \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \; ^{R_0}\omega_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\beta}\cos\alpha \\ \dot{\beta}\sin\alpha \end{bmatrix}, ^{R_0}\omega_{\beta\gamma} = \begin{bmatrix} \dot{\gamma}\sin\beta \\ -\dot{\gamma}\sin\alpha\cos\beta \\ \dot{\gamma}\cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix} \qquad (2.117)$$

Từ đó suy ra:

$$\begin{bmatrix} \omega_x^{(0)} \\ \omega_y^{(0)} \\ \omega_z^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sin\beta \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha\cos\beta \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} \qquad (2.118)$$

Từ (2.118) ta suy ra phương trình vi phân động học:

$$\begin{bmatrix}\dot{\alpha}\\ \dot{\beta}\\ \dot{\gamma}\end{bmatrix}=\frac{1}{\cos\beta}\begin{bmatrix}\cos\beta & \sin\alpha\cos\beta & -\cos\alpha\sin\beta\\ 0 & \cos\alpha\cos\beta & \sin\alpha\cos\beta\\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_x^{(0)}\\ \omega_y^{(0)}\\ \omega_z^{(0)}\end{bmatrix} \quad (2.119)$$

Chiếu (2.116) lên các trục hệ qui chiếu động Oxyz ta được:

$${}^{R_0}\omega_\gamma=\begin{bmatrix}0\\0\\\gamma\end{bmatrix},\ ,{}^{R_0}\omega_\beta=\begin{bmatrix}\dot{\beta}\sin\gamma\\ \beta\cos\gamma\\ 0\end{bmatrix},{}^{R_0}\omega_\alpha=\begin{bmatrix}\dot{\alpha}\cos\beta\cos\gamma\\ -\dot{\alpha}\cos\beta\sin\gamma\\ \dot{\alpha}\sin\gamma\end{bmatrix} \quad (2.120)$$

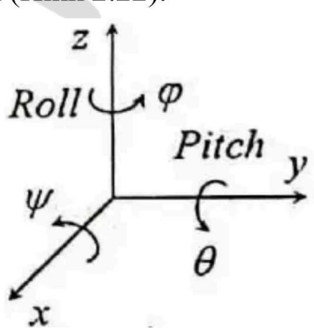
Từ (2.120) ta giải a được phương trình vi phân động học:

$$\begin{bmatrix}\dot{\alpha}\\ \dot{\beta}\\ \dot{\gamma}\end{bmatrix}=\frac{1}{\cos\beta}\begin{bmatrix}\cos\gamma & -\sin\gamma & 0\\ \cos\beta\sin\gamma & \cos\beta\cos\gamma & 0\\ -\sin\beta\cos\gamma & \sin\beta\sin\gamma & \cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix} \quad (2.121)$$

2.4.3. Các góc Roll – Pitch – Yaw

a) Xác định ma trận côsin chỉ hướng từ các góc Roll – Pitch – Yaw

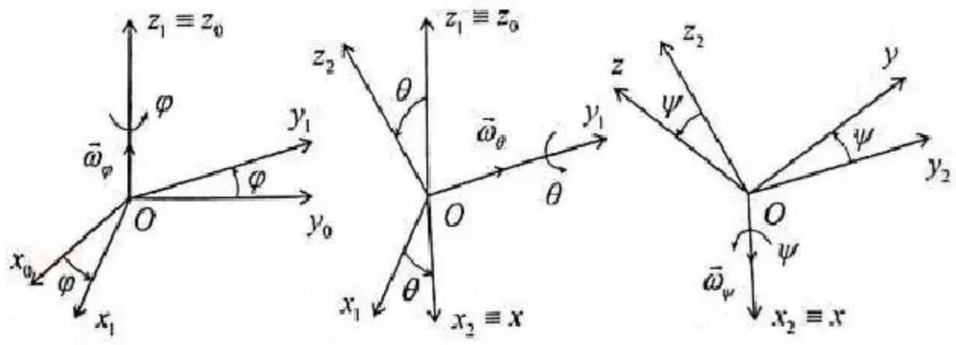
Một loại các phép quay khác hay được sử dụng trong Robot công nghiệp và kỹ thuật hàng hải là các phép quay Roll – Pitch – Yaw lần lượt quay quanh các trục z-y-x (Hình 2.22).



Hình 2.22. Các góc Roll – Pitch – Yaw

Ta có thể quay hệ qui chiếu cố định $Ox_0y_0z_0$ sang hệ qui chiếu động Oxyz bằng ba phép quay Roll – Pitch – Yaw như sau (Hình 2.23).

DO NOT COPY



Hình 2.23. Phép quay theo 3 góc Roll – Pitch – Yaw

Quay hệ $Ox_0y_0z_0$ quanh Oz_0 một góc φ tuỳ ý (góc Roll). Hệ $Ox_0y_0z_0$ chuyển thành hệ $Ox_1y_1z_1$ với $Oz_0 \equiv Oz_1$.

Quay hệ $Ox_1y_1z_1$ quanh trục Oy_1 một góc θ (góc Pitch) sao cho trục Ox_1 chuyển đến trục Ox. Hệ $Ox_1y_1z_1$ chuyển thành hệ $Ox_2y_2z_2$ với $Oy_1 \equiv Oy_2$.

Quay hệ $Ox_2y_2z_2$ quanh trục $Ox_2 \equiv Ox$ một góc ψ (góc Yaw) sao cho trục Oz_2 chuyển tới trục O_z. Hệ $Ox_2y_2z_2$ chuyển thành hệ $Oxyz$.

Các ma trận quay tương ứng với phép quay Roll, Pitch, Yaw có dạng như sau:

$$A_z(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} A_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$A_x(\psi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & -\sin\psi \\ 0 & \sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix} \qquad (2.122)$$

Ma trận quay Roll-Pitch- Yaw chuyển từ hệ qui chiếu $Ox_0y_0z_0$ chuyển sang hệ qui chiếu $Oxyz$ có dạng:

$$A = A_z(\varphi), A_y(\theta), A_x(\psi) \qquad (2.123)$$

Thế các ma trận $A_z(\varphi), A_y(\theta), A_x(\psi)$ ở trên vào (2.123) ta được ma trận côsin chỉ hướng:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\theta & \cos\varphi\sin\theta\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi & \cos\varphi\sin\theta\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi \\ \sin\varphi\cos\theta & \sin\varphi\sin\theta\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi & \sin\varphi\sin\theta\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi \\ -\sin\theta & \cos\theta\sin\psi & \cos\theta\cos\psi \end{bmatrix} \quad (2.124)$$

b) Xác định các góc Roll-Pitch- Yaw từ ma trận côsin chỉ hướng

So sánh các phần tử tương ứng với hai ma trận côsin chỉ hướng (2.108) và (2.124) ta suy ra:

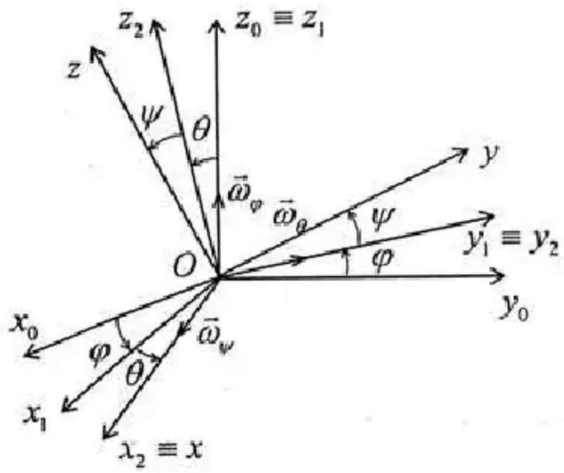
$$\begin{aligned} &\sin\theta = -a_{13}, \quad \cos\theta = \pm\sqrt{1-\sin^2\theta} \\ &\sin\psi = \frac{a_{23}}{\cos\theta}, \quad \cos\psi = \frac{a_{33}}{\cos\theta} \\ &\sin\varphi = -\frac{a_{12}}{\cos\theta}, \quad \cos\varphi = \frac{a_{11}}{\cos\theta} \end{aligned} \quad (2.125)$$

Khi $\theta \approx (2n+1)\frac{\pi}{2}$ (n=0,1,2,...) thì $\sin^2\theta \approx 1, \cos\theta \approx 0$. Giá trị này của góc θ được gọi là giá trị tới hạn. Thông thường trong các bài toán kỹ thuật robot $\frac{\pi}{2} \langle \theta \langle \frac{\pi}{2}$. Khi đó $\cos\theta > 0$.

c) Xác định vận tốc góc của vật rắn từ các góc Roll- Pitch- Yaw

Nếu ta sử dụng ba góc quay Roll- Pitch- Yaw để xác định vị trí của vật rắn B quay quanh một điểm O cố định thì ta có thể quay hệ qui chiếu cố định $Ox_0y_0z_0$ sang hệ qui chiếu Oxyz bằng ba phép quay các góc φ, θ, ψ (Hình 2.24).

DO NOT COPY



Hình 2.24. Phép quay tổng hợp theo 3 góc Roll – Pitch – Yaw

Theo định lý cộng vận tốc góc ta có

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_\varphi + \vec{\omega}_\theta + \vec{\omega}_\psi \qquad (2.126)$$

Chiếu (2.126) lên các trục của hệ toạ độ cố định R_0=O$x_0 y_0 z_0$ ta được

$$^{R_0}\omega_\varphi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}, \ ,$$

$$^{R_0}\omega_\theta = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}\sin\varphi \\ \theta\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad (2.127)$$

$$^{R_0}\omega_\psi = A_{YPR} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\psi}\cos\varphi\cos\theta \\ \dot{\psi}\sin\varphi\cos\theta \\ -\dot{\psi}\sin\theta \end{bmatrix}$$

Từ đó suy ra:

$$\begin{bmatrix}\omega_x^{(0)}\\ \omega_y^{(0)}\\ \omega_z^{(0)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -\sin\varphi & \cos\varphi\cos\theta\\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi\cos\theta\\ 1 & 0 & -\sin\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot\varphi\\ \dot\theta\\ \dot\psi\end{bmatrix} \qquad (2.128)$$

Từ (2.128) ta suy ra phương trình vi phân động học:

$$\begin{bmatrix}\dot\varphi\\ \dot\theta\\ \dot\psi\end{bmatrix}=\frac{1}{\cos\theta}\begin{bmatrix}\cos\varphi\sin\theta & \sin\varphi\sin\theta & \cos\theta\\ -\sin\varphi\cos\theta & \cos\varphi\cos\theta & 0\\ \cos\varphi & \sin\varphi & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_x^{(0)}\\ \omega_y^{(0)}\\ \omega_z^{(0)}\end{bmatrix} \qquad (2.129)$$

Chiếu (2.127) lên các trục hệ qui chiếu động R=Oxyz ta được

$${}^{R_0}\omega_\psi=\begin{bmatrix}\dot\psi\\ 0\\ 0\end{bmatrix},,$$

$${}^{R_0}\omega_\theta=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\psi & \sin\psi\\ 0 & -\sin\psi & \cos\psi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \dot\theta\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \dot\theta\cos\psi\\ -\dot\theta\sin\psi\end{bmatrix}, \qquad (2.130)$$

$${}^{R_0}\omega_\varphi=A_{YPR}^T\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \dot\varphi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dot\varphi\sin\theta\\ \dot\varphi\cos\theta\sin\psi\\ \varphi\cos\theta\cos\psi\end{bmatrix}$$

Từ đó ta có hệ thức:

$$\begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\sin\theta & 0 & 1\\ \cos\theta\sin\psi & \cos\psi & 0\\ \cos\theta\cos\psi & -\sin\psi & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot\varphi\\ \dot\theta\\ \dot\psi\end{bmatrix} \qquad (2.131)$$

Từ (2.131) ta giải a được phương trình vi phân động học trong hệ qui chiếu động:

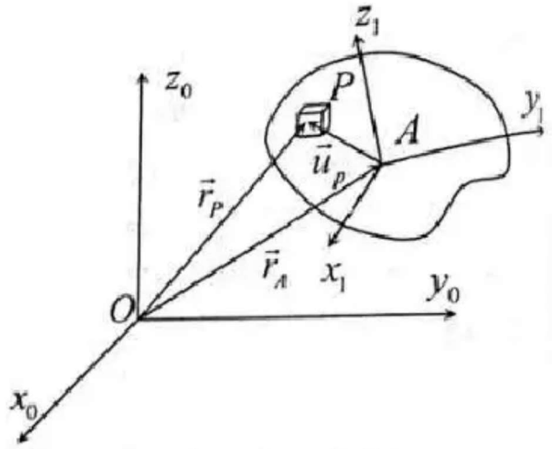
DO NOT COPY

$$\begin{bmatrix}\dot{\varphi}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\psi}\end{bmatrix}=\frac{1}{\cos\theta}\begin{bmatrix}0 & \sin\psi & \cos\psi\\ 0 & \cos\theta\cos\psi & -\cos\theta\sin\psi\\ 1 & \sin\theta\sin\psi & \sin\theta\cos\psi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix} \qquad (2.132)$$

2.5. XÁC ĐỊNH VẬN TỐC, GIA TỐC CỦA ĐIỂM THUỘC VẬT RẮN

2.5.1. Xác định vận tốc của điểm thuộc vật rắn

Để xét chuyển động của vật rắn B ở trong hệ qui chiếu R_0=Ox$_0$$y_0$$z_0$ ta lấy một điểm A bất kỳ thuộc vật rắn làm định vị (điểm cực). Dựng hệ qui chiếu R_1=Ax$_1$$y_1$$z_1$ gắn liền vào vật rắn B (hình 2.25).



Hình 2.25. Điển P thuộc vật rắn A

Vị trí của điểm P được xác định bởi véctơ sau:

$$\vec{r}_P=\vec{r}_A+\vec{u}_P \qquad (2.133)$$

Đạo hàm theo thời gian hai vế của phương trình (2.133) ở trong hệ qui chiếu R_0 ta được:

$$\frac{^{R_0}d\vec{r}_P}{dt}=\frac{^{R_0}d\vec{r}_A}{dt}+\frac{^{R_0}d\vec{u}_P}{dt} \qquad (2.134)$$

Theo định nghĩa vận tốc góc của vật rắn ta có

$$\frac{^{R_0}d\vec{u}_P}{dt} = {}^R\vec{\omega}^B \times \vec{u}_P = \vec{\omega} \times \vec{u}_P \qquad (1.135)$$

Thế (2.135) vào phương trình (2.134) ta được:

$$\frac{^{R_0}d\vec{r}_P}{dt} = \frac{^{R_0}d\vec{r}_A}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{u}_P \Rightarrow \vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{u}_P \qquad (2.136)$$

Chiếu phương trình véctơ (2.136) lên hệ qui chiếu R_0 ta có:

$$v_P^{(0)} = v_A^{(0)} + \tilde{\omega}^{(0)} u_P^{(o)} \qquad (2.137)$$

Chiếu phương trình véctơ (2.137) lên hệ qui chiếu R_1 ta được:

$$v_P^{(1)} = v_A^{(1)} + \tilde{\omega}^{(1)} u_P^{(1)} \qquad (2.138)$$

2.5.2. Xác định gia tốc của điểm thuộc vật rắn

Đạo hàm theo thời gian biểu thức (2.136) trong hệ qui chiếu R_0 ta được:

$$\frac{^{R_0}d\vec{v}_P}{dt} = \frac{^{R_0}d\vec{v}_A}{dt} + \frac{^{R_0}d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{u}_P + \vec{\omega} \times \frac{^{R_0}d\vec{u}_P}{dt} \qquad (2.139)$$

Từ đó suy ra:

$$\vec{a}_P = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{u}_P + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{u}_P) \qquad (2.140)$$

Chiếu phương trình véctơ (2.140) lên hệ qui chiếu R_0 ta có phương trình ma trận:

$$\begin{aligned} \mathrm{a}_P^{(0)} &= \mathrm{a}_A^{(0)} + \tilde{\varepsilon}^{(0)} u_P^{(0)} + \tilde{\omega}^{(0)} (\tilde{\omega}^{(0)} u_P^{(0)}) \\ \mathrm{a}_P^{(0)} &= \mathrm{a}_A^{(0)} + (\tilde{\varepsilon}^{(0)} + \tilde{\omega}^{(0)} \tilde{\omega}^{(0)}) u_P^{(0)} \end{aligned} \qquad (2.141)$$

Chiếu phương trình véctơ (2.140) lên hệ qui chiếu R_1 ta được:

$$\begin{aligned} \mathrm{a}_P^{(1)} &= \mathrm{a}_A^{(1)} + \tilde{\varepsilon}^{(1)} u_P^{(1)} + \tilde{\omega}^{(1)} (\tilde{\omega}^{(1)} u_P^{(1)}) \\ \mathrm{a}_P^{(1)} &= \mathrm{a}_A^{(1)} + (\tilde{\varepsilon}^{(1)} + \tilde{\omega}^{(1)} \tilde{\omega}^{(1)}) u_P^{(1)} \end{aligned} \qquad (2.142)$$

Câu hỏi ôn tập

DO NOT COPY

2.1. Hãy trình bày khái niệm về điểm định vị và hướng của vật rắn?

2.2. Khái niệm về ma trân côsin chỉ hướng và các tính chât cơ bản của ma trận cosin chỉ hướng?

2.3. Nêu định lý Euler về chuyển động quay hữu hạn của vật rắn có một điểm cố định?

2.4. Hãy trình bày các ma trận quay cơ bản?

2.5. Nêu khái niệm về vận tốc góc và gia tốc góc của vật rắn?

2.6. Các định lý cơ bản về vận tốc góc của vật rắn?

2.7. Đạo hàm của véctơ trong hệ qui chiếu động?

2.8. Công thức cộng vận tốc và gia tốc góc của vật rắn?

2.9. Trình bày các góc Euler?

2.10. Trình bày các góc Cardan?

2.11. Trình bày các góc Roll – Pitch – Yaw?

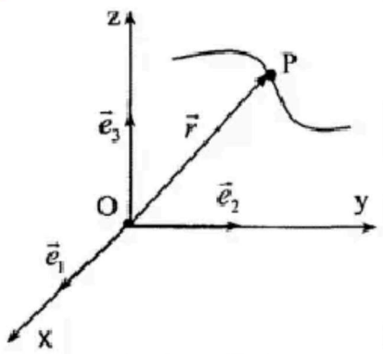
2.12. Trình bày cách xác định vận tốc của một điểm thuộc vật rắn?

2.13. Trình bày cách xác định gia tốc của một điểm thuộc vật rắn?

3. Chương 3
ĐỘNG HỌC HỆ NHIỀU VẬT

3.1. ĐỘNG HỌC HÌNH HỌC

3.1.1. Tọa độ thuần nhất, ma trận biến đổi tọa độ thuần nhất



Hình 3.1. Biểu diễn tọa độ chất điểm trong hệ trục tọa độ đề các

Việc đưa vào các toạ độ thuần nhất và các phép biến đổi thuần nhất là nhằm mục tiêu kết hợp hai phép biến đổi tịnh tiến và phép biến đổi quay thành một phép biến duy nhất.

a) Định nghĩa các tọa độ thuần nhất

Định nghĩa. Vị trí của điểm P ở trong hệ tọa độ ba chiều Oxyz được xác định bởi véctơ sau

$$\vec{\mathbf{r}} = x\vec{\mathbf{e}}_1 + y\vec{\mathbf{e}}_2 + z\vec{\mathbf{e}}_3 \qquad (3.1)$$

Giả sử σ là một đại lượng vô hướng khác không tùy ý. Tọa độ thuần nhất của điểm P được định nghĩa bởi hệ thức sau:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \sigma x & \sigma y & \sigma z & \sigma \end{bmatrix}^T \qquad (3.2)$$

Trong kỹ thuật, người ta thường chọn $\sigma = 1$. Khi đó tọa độ thuần nhất bốn chiều của điểm P được mở rộng từ các tọa độ vật lý ba chiều của điểm P bằng cách thêm vào thành phần thứ tư như sau:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix}^T \qquad (3.3)$$

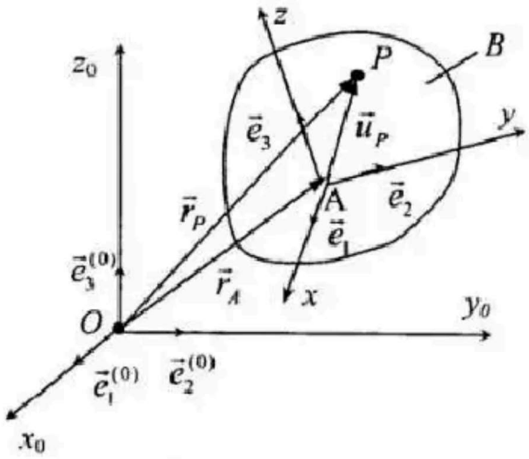
Trong trường hợp điểm P chuyển động trên một mặt phẳng, tọa độ vật lý của điểm P là:

$$\vec{\mathbf{r}} = x\vec{\mathbf{e}}_1 + y\vec{\mathbf{e}}_2 \qquad (3.4)$$

Khi đó tọa độ thuần nhất của điểm P có dạng:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \sigma x & \sigma y & \sigma \end{bmatrix}^T \qquad (3.5)$$

b) *Ma trận biến* đổi *tọa độ thuần nhất và phép biến đổi thuần nhất*



Hình 3.2. Biểu diễn tọa độ điểm thuộc vật rắn trong hệ tọa độ địa phương và hệ tọa độ gốc

Xét vật rắn B chuyển động trong hệ qui chiếu cố định $R_0 = Ox_0y_0z_0$ và điểm A thuộc vật rắn B được lấy làm điểm định vị. Hệ qui chiếu $R_A = Axyz$ gắn chặt vào vật rắn B. P là điểm bất kỳ thuộc vật rắn B.

Trong tọa độ vật lý R_0 ta có:

$$\vec{\mathbf{r}}_{\mathrm{P}} = \vec{\mathbf{r}}_{\mathrm{A}} + \vec{\mathbf{u}}_{\mathrm{P}} \qquad (3.6)$$

Phương trình (3.6) có thể viết lại dưới dạng ma trận như sau:

$$\begin{bmatrix} x_P^{(0)} \\ y_P^{(0)} \\ z_P^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_A^{(0)} \\ y_A^{(0)} \\ z_A^{(0)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{Px}^{(1)} \\ u_{Py}^{(1)} \\ u_{Pz}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_A^{(0)} \\ y_A^{(0)} \\ z_A^{(0)} \end{bmatrix} + \mathbf{A} \begin{bmatrix} u_{Px}^{(1)} \\ u_{Py}^{(1)} \\ u_{Pz}^{(1)} \end{bmatrix} \qquad (3.7)$$

Trong đó:

A - ma trận Cosin chỉ hướng của vật rắn B.

$u_{Px}^{(1)}, u_{Py}^{(1)}, u_{Pz}^{(1)}$ - tọa độ của điểm P trong hệ qui chiếu R_A

Nếu sử dụng các tọa độ thuần nhất, phương trình (3.7) có thể được viết lại dưới dạng:

$$\begin{bmatrix} x_P^{(0)} \\ y_P^{(0)} \\ z_P^{(0)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & x_A^{(0)} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & y_A^{(0)} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & z_A^{(0)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{Px}^{(1)} \\ u_{Py}^{(1)} \\ u_{Pz}^{(1)} \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (3.8)$$

Nếu đưa vào ký hiệu ma trận:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & x_A^{(0)} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & y_A^{(0)} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & z_A^{(0)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & {}^{R_0}\mathbf{r}_A \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \qquad (3.9)$$

Thì phương trình (3.9) có thể viết lại dưới dạng:

$$\begin{bmatrix} {}^{R_0}\mathbf{r}_P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & {}^{R_0}\mathbf{r}_A \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{R_0}\mathbf{u}_P \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (3.10)$$

Định nghĩa: Ma trận **T** xác định theo (3.9) được gọi là ma trận biến đổi thuần nhất, phép biến đổi (3.10) được gọi là phép biến đổi thuần nhất.

c) Một vài tính chất của ma trận biến đổi thuần nhất

- Ma trận biến đổi thuần nhất **T** chứa thông tin về hướng của vật rắn, mô tả bởi ma trận côsin chỉ hướng **A**, và thông tin về điểm định vị (điểm cực) của vật rắn, mô tả bởi véctơ đại số ${}^{R_0}\mathbf{r}_A$.

- Định thức của ma trận thuần nhất bằng 1

$$\det \mathbf{T} = \det \mathbf{A} = 1 \qquad (3.11)$$

- Ma trận nghịch đảo của ma trận thuần nhất được xác định bởi công thức:

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T & -\mathbf{A}^T\, {}^{R_0}\mathbf{r}_A \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \qquad (3.12)$$

d) Các ma trận quay cơ bản thuần nhất và ma trận tịnh tiến thuần nhất

Các ma trận quay cơ bản trong hệ tọa độ đề các mở rộng ra trong hệ tọa độ thuần nhất bốn chiều có dạng như sau:

$$\mathbf{T}_x(\varphi) = Rot(x,\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (3.13)$$

$$\mathbf{T}_y(\varphi) = Rot(y,\psi) = \begin{bmatrix} \cos\psi & 0 & \sin\psi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\psi & 0 & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (3.14)$$

$$\mathbf{T}_z(\theta) = Rot(z,\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (3.15)$$

Ngoài ra ta đưa vào khái niệm ma trận tịnh tiến thuần nhất có dạng:

$$Trans(a,b,c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (3.16)$$

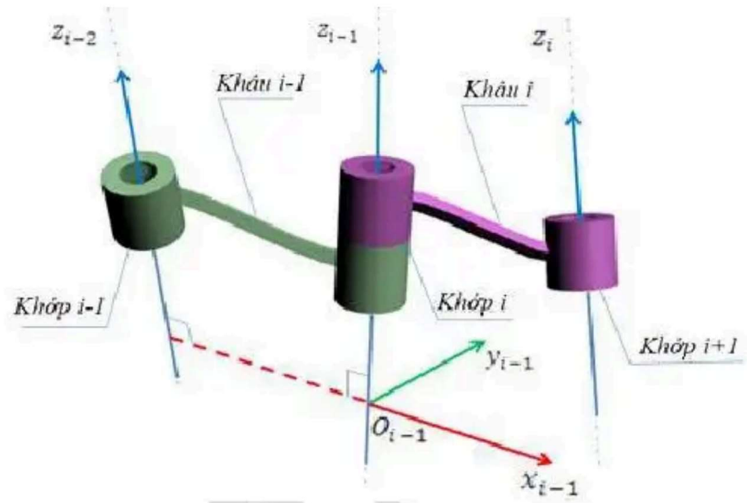
Trong đó ta thực hiện chuyển động tịnh tiến theo hướng trục tọa độ x một đoạn là a, theo hướng trục tọa độ y một đoạn là b, theo hướng trục tọa độ z một đoạn là c.

3.1.2. Phân tích động học cơ hệ theo qui tắc Denavit – Hartenberg

Một trong các phương pháp hay được sử dụng để phân tích động học và động lực học hệ nhiều vật ghép nối với nhau bằng khớp, chủ yếu là các khớp quay và khớp tịnh tiến, là phương pháp ma trận Denavit-Hartenberg.

a) Cách chọn hệ tọa độ theo Denavit-Hartenberg

Trên hình 3.3 mô tả một phần cơ hệ bao gồm 2 khâu (i-1 và i) và 3 khớp (i-1, i và i+1) và cách đặt hệ tọa độ địa phương gắn vào từng khâu theo phương pháp Denavit-Hartenberg.



Hình 3.3. Cách chọn hệ tọa độ theo Denavit-Hartenberg

- Trục z_{i-1} được chọn dọc theo hướng của trục khớp động thứ i.

- Trục x_{i-1} được chọn dọc theo đường vuông góc chung của hai trục z_{i-2} và z_{i-1} hướng đi từ trục z_{i-2} sang trục z_{i-1}. Nếu trục z_{i-1} cắt trục z_{i-2} thì hướng của trục x_{i-1} được chọn tùy ý.

- Gốc tọa độ O_{i-1} được chọn tại giao điểm của trục x_{i-1} và trục z_{i-1}

- Trục y_{i-1} được chọn sao cho hệ $(Oxyz)_{i-1}$ là một hệ qui chiếu thuận.

Hệ toạ độ $(Oxyz)_{i-1}$ được xác định như trên trong một sổ tài liệu được qui ước gọi là hệ toạ độ khớp. Với cách chọn hệ tọa độ như trên, đôi khi hệ tọa độ khớp $(Oxyz)_{i-1}$ không được xác định một cách duy nhất. Vì vậy ta cần có một số bổ sung thích hợp như sau.

- Đối với hệ tọa độ $(Oxyz)_0$ theo qui ước trên ta mới chỉ chọn được trục z_0, còn trục x_0 chưa có trong qui ước trên. Ta có thể chọn trục x_0 một cách tùy ý, miễn là x_0 vuông góc với z_0.

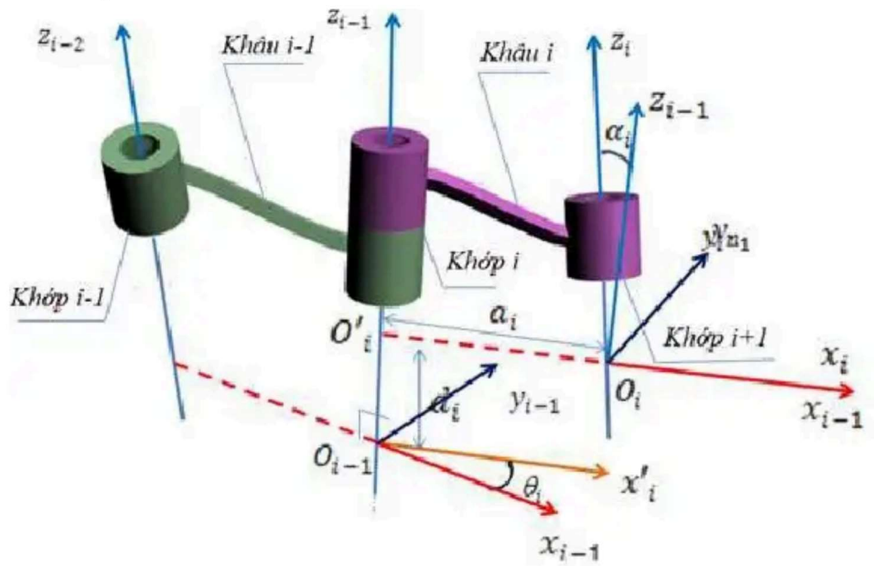
- Đối với hệ tọa độ $(Oxyz)_n$ do không có khớp $n+1$, nên theo qui ước trên ta không xác định được trục z_n. Trục z_n không được xác định duy nhất, trong khi trục x_n lại được chọn theo pháp tuyến của trục z_{n-1}. Trong trường hợp này, nếu khớp n là khớp quay ta có thể chọn trục z_n song song với trục z_{n-1}. Ngoài ra ta có thể chọn sao cho hợp lý.

- Khi hai trục z_{i-2} và z_{i-1} song song với nhau, giữa hai trục này có nhiều đường vuông góc chung, ta có thể chọn trục x_{i-1} hướng theo đường vuông góc chung nào cũng được.

- Khi khớp thứ i là khớp tịnh tiến, về nguyên tắc có thể chọn trục z_{i-1} một cách tùy ý. Tuy nhiên trong nhiều trường hợp người ta thường chọn trục z_{i-1} dọc theo *trục của khớp tịnh tiến này.*

b) Bảng tham số Denavit-Hartenberg

Hình 3.4 biểu diễn các tham số Denavit-Hartenberg của khớp quay. Hình vẽ mô tả một phần cơ hệ gồm 2 khâu (i-1 và i) và 3 khớp quay (khớp i-1 và i).



Hình 3.4. Biểu diễn các tham số Denavit Hartenberg của khớp quay

Trong hình 3.4, các tham số có ý nghĩa như sau:

θ_i: góc quay quanh trục z_{i-1} để trục x_{i-1} chuyển đến trục x'_i (x'_i // x_i).

d_i: dịch chuyển tịnh tiến dọc theo trục z_{i-1} để gốc tọa độ O_{i-1} chuyển đến O'_i giao điểm của trục x_i và trục z_{i-1}.

a_i : dịch chuyển tịnh tiến dọc theo trục x_i để điểm O'_i chuyển đến điểm O_i.

α_i: góc quay quanh trục x_i sao cho trục z'_{i-1} (z'_{i-1} // z_{i-1}) chuyển đến trục z_i.

Ta biểu diễn các tham số này trong một bảng như bảng 3.1

Bảng 3.1. Bảng tham số Denavit-Hartenberg

Khâu	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1	d_1	a_1	α_1
2	θ_2	d_2	a_2	α_2
…	…	…	…	…
n-1	θ_{n-1}	d_{n-1}	a_{n-1}	α_{n-1}
n	θ_n	d_n	a_n	α_n

c) Các ma trận Denavit-Hartenberg

Có thể chuyển hệ tọa độ khớp $(Oxyz)_{i-1}$ sang hệ tọa độ khớp $(Oxyz)_i$ bằng bốn phép biến đổi cơ bản như sau:

- Quay quanh trục z_{i-1} một góc θ_i
- Dịch chuyển tịnh tiến dọc trục z_{i-1} một đoạn d_i
- Dịch chuyển tịnh tiến dọc trục x_i một đoạn a_i
- Quay quanh trục x_i một góc α_i

Lưu ý: Các tham số về góc quay có giá trị dương khi góc quay đó làm tiến đinh ốc theo chiều dương của trục quay (qui tắc xoáy đinh ốc). Các tham

số dịch chuyển tịnh tiến có giá trị dương khi dịch chuyển theo chiều dương của trục tịnh tiến.

Ma trận của phép biến đổi, ký hiệu là $\mathbf{H}_i$, là tích của bốn ma trận biến đổi cơ bản và có dạng như sau:

$$\mathbf{H}_i = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 & 0 \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_i & -\sin\alpha_i & 0 \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_i = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i\cos\alpha_i & \sin\theta_i\sin\alpha_i & a_i\cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i\cos\alpha_i & -\cos\theta_i\sin\alpha_i & a_i\sin\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (3.17)$$

Định nghĩa*:* Ma trận $\mathbf{H}_i$ được xác định bởi công thức (3.17) được gọi là ma trận *Denavit-Hartenberg địa phương.*

Ma trận *Denavit-Hartenberg địa phương* $\mathbf{H}_i$ là ma trận chuyển toạ độ một điểm từ hệ qui chiếu $(Oxyz)_{i-1}$ sang hệ qui chiếu $(Oxyz)_i$

Ma trận Denavit-Hartenberg toàn cục $\mathbf{D}_i$ là ma trận chuyển tọa độ một điểm từ hệ qui chiếu cố định $(Oxyz)_0$ sang hệ qui chiếu $(Oxyz)_i$. Ma trận $\mathbf{D}_i$ xác định như sau:

$$\mathbf{D}_i = \mathbf{H}_1\mathbf{H}_2...\mathbf{H}_i \qquad (3.18)$$

Ma trận $\mathbf{D}_i$ là ma trận cỡ 4x4, cho biết vị trí của khâu thứ i của hệ trong hệ qui chiếu cố định R_0. Trong đó ma trận 3x3 ở góc bên trái là ma trận cosin chỉ hướng của khâu thứ i, véctơ ở cột thứ tư cho biết vị trí của điểm O_i.

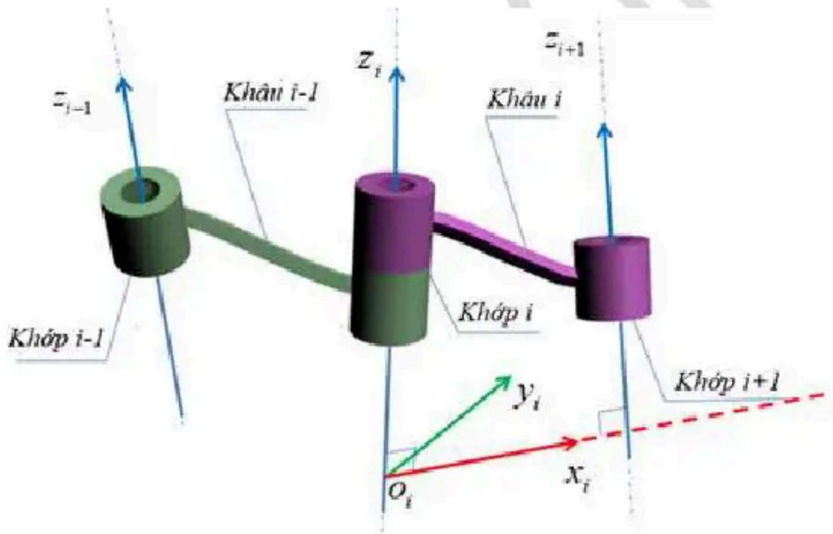
$$\mathbf{D}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i & \mathbf{r}_{O_i}^{(0)} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \qquad (3.19)$$

H01 = H01
H01 = H01 * H12
H03 = H01 * H12 *H23

3.1.3. Phân tích động học hệ có cấu trúc cây bằng qui tắc Craig

Đây là phương pháp được sử dụng để phân tích động học hệ nhiều vật ghép nối với nhau bằng khớp, chủ yếu là các khớp quay và khớp tịnh tiến được Craig cải tiến từ phương pháp Denavit-Hartenberg. Phương pháp này khác phương pháp Denavit-Hartenberg ở chỗ các hệ tọa độ khớp thường được gắn vào phía đầu của khâu (tính theo chiều từ đế đến khâu công tác) tiện trong việc xác định tọa độ các điểm thuộc khâu, phục vụ cho việc tính toán đơn giản hơn. Tuy nhiên phương pháp Denavit-Hartenberg sẽ thuận tiện trong việc xác định vị trí khâu công tác hơn.

a) Cách chọn hệ tọa độ theo Craig



Hình 3.5. Chọn hệ trục tọa độ theo phương pháp Craig

- Trục z_i được chọn dọc theo hướng của trục khớp động thứ i

- Trục x_i được chọn dọc theo đường vuông góc chung của hai trục z_i và z_{i+1}, hướng đi từ trục z_i sang trục z_{i+1}. Nếu trục z_i cắt trục z_{i+1} thì hướng của trục x_i được chọn tùy ý đi qua giao điểm và vuông góc trục z_i

- Gốc tọa độ O_i được chọn tại giao điểm của trục x_i và trục z_i.

- Trục y_i được chọn sao cho hệ $(Oxyz)_i$ là hệ qui chiếu thuận.

Một số bổ sung thích hợp:

- Cách chọn hệ tọa độ $R_0 = (Oxyz)_0$ gắn chặt vào giá đỡ: Về nguyên tắc, có thể chọn hệ tọa độ R_0 gắn một cách tùy ý, tuy nhiên thường chọn $O_0z_0 = O_1z_1$ để đơn giản các tham số Craig, khi đó $a_0 = 0$; $\alpha_0 = 0$.

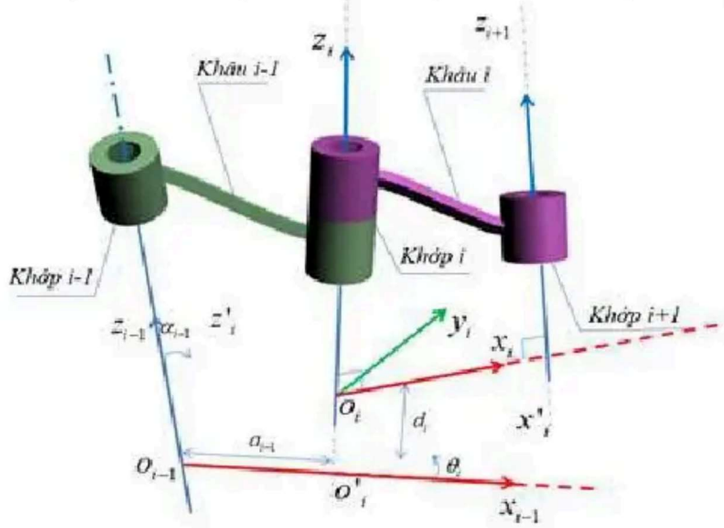
- Cách chọn hệ tọa độ $R_n = (Oxyz)_n$ gắn chặt vào khâu thao tác: Chọn z_n dọc trục khớp n. Khi đó, $a_{n-1} = O_{n-1}O_n$; $\alpha_{n-1} = 0$. Không có khớp $n+1$ nên trục x_n được chọn tùy ý, miễn là vuông góc với trục z_n.

- Khi khớp thứ i là khớp tịnh tiến, ta có thể chọn z_i một cách tùy ý. Tuy nhiên nên chọn z_i dọc trục khớp thứ i (nếu có thể) để đơn giản các tham số Craig.

b) Bảng tham số Craig

Bảng 3.2. Bảng tham số Craig

Khâu	α_{i-1}	a_{i-1}	θ_i `	d_i
1	α_0	a_0	θ_1	d_1
2	α_1	a_1	θ_2	d_2
…	…	…	…	…
n-1	θ_{n-2}	d_{n-2}	a_{n-1}	α_{n-1}
n	θ_{n-1}	d_{n-1}	a_n	α_n



Hình 3.6. Biểu diễn các tham số Craig của khớp quay

θ_i: góc quay quanh trục z_{i-1} để trục x_{i-1} chuyển đến trục x'_i (x'_i // x_i)

: dịch chuyển tịnh tiến dọc theo trục z_{i-1} để gốc tọa độ O_{i-1} chuyển đến O'_i giao điểm của trục x_i và trục z_{i-1}

: dịch chuyển tịnh tiến dọc theo trục x_i để điểm O'_i chuyển đến điểm O_i

α_i: góc quay quanh trục x_i sao cho trục z'_{i-1}(z'_{i-1}// z_{i-1}) chuyển đến trục z_i

α_{i-1}: góc quay quanh trục x_{i-1} để trục z_{i-1} chuyển đến trục z'_i (z'_i // z_i)

a_{i-1} : dịch chuyển tịnh tiến dọc theo trục x_{i-1} để gốc tọa độ O_{i-1} chuyển đến O'_i, giao điểm của trục x_{i-1} và trục z_i

θ_i: góc quay quanh trục z_i sao cho trục x_{i-1} chuyển đến trục x'_i (x'_i // x_i)

d_i : dịch chuyển tịnh tiến dọc theo trục z_i để điểm O'_i chuyển đến điểm O_i

c) Các ma trận Craig

Có thể chuyển hệ tọa độ khớp $(Oxyz)_{i-1}$ sang hệ tọa độ khớp $(Oxyz)_i$ bằng bốn phép biến đổi cơ bản như sau:

- Quay quanh trục x_{i-1} một góc α_{i-1}
- Dịch chuyển tịnh tiến dọc trục x_{i-1} một đoạn a_{i-1}
- Quay quanh trục z_i một góc θ_i
- Dịch chuyển tịnh tiến dọc trục z_i một đoạn d_i

Ma trận của phép biến đổi, ký hiệu là Ki, là tích của bốn ma trận biến đổi cơ bản và có dạng như sau

$$\mathbf{K}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_{i-1} & -\sin\alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & \sin\alpha_{i-1} & \cos\alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{i-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 & 0 \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

DO NOT COPY

$$\mathbf{K}_i = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ \sin\theta_i \cos\alpha_{i-1} & \cos\theta_i \cos\alpha_{i-1} & -\sin\alpha_{i-1} & -d_i \sin\alpha_{i-1} \\ \sin\theta_i \sin\alpha_{i-1} & \cos\theta_i \sin\alpha_{i-1} & \cos\alpha_{i-1} & d_i \cos\alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Định nghĩa. Ma trận $\mathbf{K}_i$ được xác định bởi công thức (3.20) được gọi là ma trận *Craig địa phương.*

Ma trận *Craig địa phương* $\mathbf{K}_i$ là ma trận chuyển toạ độ một điểm từ hệ qui chiếu $(Oxyz)_{i-1}$ sang hệ qui chiểu $(Oxyz)_i$

Ma trận *Craig* toàn cục $\mathbf{C}_i$ là ma trận chuyển tọa độ một điểm từ hệ qui chiếu cố định $(Oxyz)_0$ sang hệ qui chiếu $(Oxyz)_i$. Ma trận $\mathbf{C}_i$ xác định như sau:

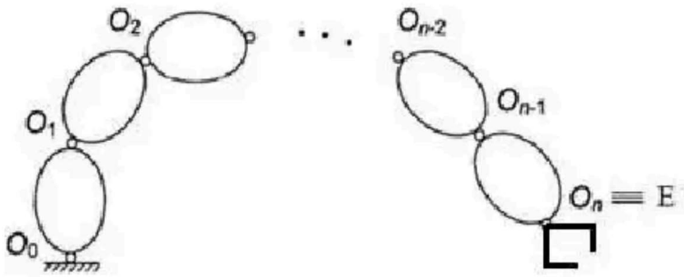
$$\mathbf{C}_i = \mathbf{K}_1 \mathbf{K}_2 ... \mathbf{K}_i \quad (3.21)$$

Ma trận $\mathbf{C}_i$ là ma trận cỡ 4x4, cho biết vị trí của khâu thứ i của hệ trong hệ qui chiếu cố định R_0. Trong đó ma trận 3x3 ở góc bên trái là ma trận cosin chỉ hướng của khâu thứ i, vec tơ ở cột thứ tư cho biết vị trí của điểm O_i.

$$\mathbf{C}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i & \mathbf{r}_{O_i}^{(0)} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

3.1.4. Xác định vị trí khâu thao tác

a) Xác định vị trí khâu công tác theo phương pháp Denavit-Hartenberg



Hình 3.7.Vị trí đặt gốc các hệ trục tọa độ địa phương theo D-H

Xét mô hình cơ học của một rôbôt n khâu động như hình 3.7

Từ công thức (3.19) áp dụng đối với khâu thứ n:

$$\mathbf{D}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_n & \mathbf{r}_{O_n}^{(0)} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \qquad (3.23)$$

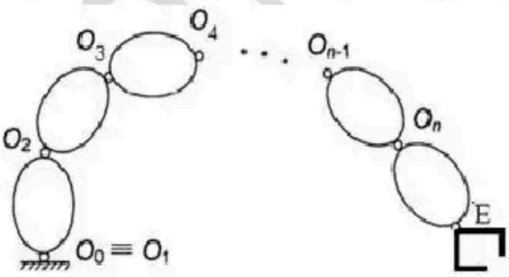
Ma trận Denavit-Hartenberg toàn cục $\mathbf{D}_n$ cho ta biết:

- Vị trí điểm O_n trong hệ qui chiếu R_0 qua véctơ $\mathbf{r}_{O_n}^{(0)}$

- Hướng của khâu thứ n đối với hệ qui chiếu R_0 qua ma trận cosin chỉ hướng $\mathbf{A}_n$

Đối với phân tích động học cơ hệ nhiều vật bằng phương pháp D-H, vị trí O_n thường được chọn đặt tại điểm định vị E của khâu công tác. Như vậy ma trận $\mathbf{D}_n$ đủ xác định được vị trí khâu công tác (vị trí điểm định vị E và hướng khâu công tác) trong hệ qui chiếu R_0.

b) Xác định vị trí khâu công tác theo phương pháp Craig



Hình 3.8.Vị trí đặt gốc các hệ trục tọa độ địa phương theo Craig

Xét mô hình cơ học của một rôbôt n khâu động như hình 3.8

Từ công thức (3.22) áp dụng đối với khâu thứ n:

$$\mathbf{C}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_n & \mathbf{r}_{O_n}^{(0)} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \qquad (3.24)$$

Ma trận Craig toàn cục $\mathbf{C}_n$ cho ta biết:

-Vị trí điểm O_n trong hệ qui chiếu R_0 qua véctơ $\mathbf{r}_{O_n}^{(0)}$

- Hướng của khâu thứ n đối với hệ qui chiếu R_0 qua ma trận cosin chỉ hướng $\mathbf{A}_n$.

Đối với phân tích động học cơ hệ nhiều vật bằng phương pháp Craig, vị trí O_n thường được chọn không trùng với điểm định vị của khâu công tác (về lý thuyết xác định vị trí vật rắn hoàn toàn có thể lấy điểm O_n làm điểm định vị, tuy nhiên thường lấy điểm E - được coi như điểm cuối của khâu công tác để tiện cho tính toán quỹ đạo khâu thao tác sau này.

Để xác định vị trí điểm định vị E trong hệ qui chiếu cố định R_0 sử dụng công thức:

$$\mathbf{r}_{\mathrm{E}} = \mathbf{r}_{\mathrm{O}_n} + \vec{\mathbf{u}}_{\mathrm{E}} \qquad (3.25)$$

Phương trình ma trận tương ứng (3.25) có dạng:

$$\mathbf{r}_{\mathrm{E}}^{(0)} = \mathbf{r}_{\mathrm{O}_n}^{(0)} + \mathbf{u}_{\mathrm{E}}^{(0)} = \mathbf{r}_{\mathrm{O}_n}^{(0)} + \mathbf{A}_n \mathbf{u}_{\mathrm{E}}^{(\mathrm{n})} \qquad (3.26)$$

Công thức (3.26) được biến đổi trong hệ tọa độ thuần nhất như sau:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_{\mathrm{E}}^{(0)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_n & \mathbf{r}_{\mathrm{O}_n}^{(0)} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{\mathrm{E}}^{(\mathrm{n})} \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{C}_n \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{\mathrm{E}}^{(\mathrm{n})} \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (3.27)$$

Công thức (3.27) để xác định được vị trí điểm định vị E của không công tác. Hướng của khâu công tác được xác định bởi hướng của hệ trục tọa độ gắn chặt vào khâu công tác, có gốc đặt tại điểm E. Để dễ dàng tính toán, hệ trục tọa độ đặt tại E này có các trục song song với các trục tương ứng của hệ trục tọa độ có gốc đặt tại điểm O_n. Như vậy có thể xác định hướng của khâu công tác qua ma trận cosin chỉ hướng A_n.

3.1.5. Bài toán động học thuận và bài toán động học ngược

Ký hiệu $q \in R^n$ là véctơ chứa các biến khớp trong không gian khớp, $x \in R^m$ là véctơ chứa các biến xác định vị trí và hướng của khâu thao tác trong không gian thao tác R^m $(m \le 6)$. Giả sử biết được quan hệ giữa các tọa độ thao tác và tọa độ khớp:

$$f(q,x) = 0, \quad x \in R^m,\ q \in R^n,\ f \in R^r \qquad (3.28)$$

Bài toán động học thuận: Cho biết $q = q(t)$, tìm $x = x(t)$

Bài toán động học ngược: Cho biết $x = x(t)$, tìm $q = q(t)$

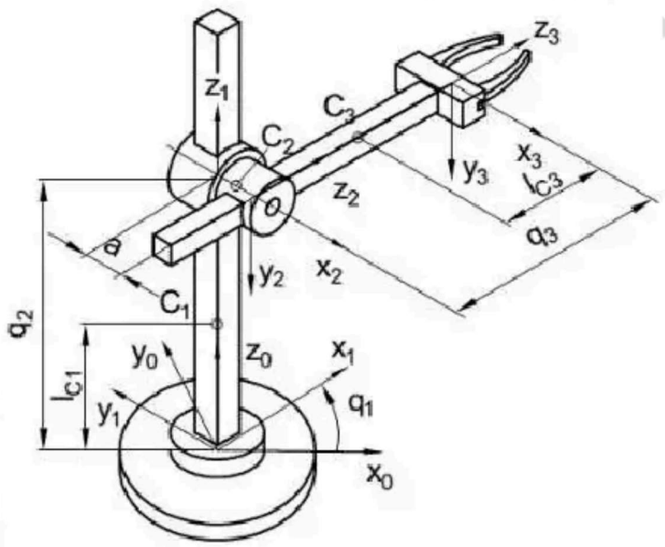
3.1.6. Các ví dụ áp dụng

Ví dụ 3.1: Cho robot ba khâu như hình 3.9. Hãy giải bài toán động học thuận và động học ngược cho robot

Giải:

a) Bài toán động học thuận

Áp dụng phương pháp D-H để giải bài toán động học robot ba khâu. Hệ trục tọa độ theo phương pháp D-H được chọn như hình 3.9



Hình 3.9. Chọn hệ tọa độ theo phương pháp D-H

Chọn hệ tọa độ suy rộng như sau:

$$\mathbf{q} = \left[\theta_1, d_2, d_3\right]^T = \left[q_1, q_2, q_3\right]^T \qquad (3.29)$$

Bảng 3.3. Bảng tham số Denavit-Hartenberg:

Trục	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	0	0	0

2	$-\pi/2$	q_2	a	$-\pi/2$
3	0	q_3	0	0

Ma trận D-H địa phương:

$$\mathbf{H}_1=\begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad =\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\mathbf{H}_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Trong đó kí hiệu: $c_1:\cos(q_1)$; $s_1:\sin(q_1)$

Ma trận D-H toàn cục:

$$\mathbf{D}_3=\mathbf{H}_1\mathbf{H}_2\mathbf{H}_3=\begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & -s_1q_3 \\ s_1 & 0 & c_1 & c_1q_3 \\ 0 & -1 & 0 & q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Giả sử đã biết: $q_1=q_1(t),\ q_2=q_2(t),\ q_3=q_3(t)$. Nhiệm vụ bài toán động học thuận là đi tìm vị trí (vị trí điểm định vị E và hướng khâu công tác). Chọn vị trí điểm định vị của khâu công tác trùng với gốc tọa độ địa phương O3.

Vị trí điểm định vị E (hay vị trí O3) được xác định qua ma trận D-H toàn cục D3 từ phương trình (E1-3)

Tọa độ điểm thao tác (điểm E):

$$\begin{bmatrix} x_E \\ y_E \\ z_E \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\sin q_1(t)q_3(t) \\ \cos q_1(t)q_3(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Hướng của khâu công tác được xác định qua ma trận cosin chỉ hướng

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} \cos q_1(t) & 0 & -\sin q_1(t) \\ \sin q_1(t) & 0 & \cos q_1(t) \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (3.33)$$

b) Bài toán động học ngược

Giả sử theo yêu cầu xử lý công việc, vị trí bàn kẹp robot (vị trí điểm E) của khâu công tác đi qua các điểm có tọa độ $\begin{bmatrix} x_E(\mathrm{t}) & y_E(t) & z_E(t) \end{bmatrix}$ cho trước (không quan tâm đến hướng khâu công tác). Xác định giá trị các biến khớp thỏa mãn yêu cầu trên.

Từ phương trình (E1-3), ta có:

$$\begin{cases} -q_3 \sin q_1 = x_E(t) \\ q_3 \cos q_1 = y_E(t) \\ q_2 = z_E(t) \end{cases} \qquad (3.34)$$

Từ (E1-6) tìm được giá trị các biến khớp:

$$\begin{cases} q_1 = -\arctan \dfrac{x_E(t)}{y_E(t)} \\ q_2 = z_E(t) \\ q_3 = \sqrt{x_E^2(t) + y_E^2(t)} \end{cases} \qquad (3.35)$$

3.2. ĐỘNG HỌC VI PHÂN

3.2.1. Hệ nhiều vật có cấu trúc cây

Xét hệ p vật rắn và có f bậc tự do. Ký hiệu tập các tọa độ suy rộng tối thiểu là:

$$\mathbf{q} = [q_1, q_2, ..., q_f] \qquad (3.36)$$

Vị trí của mỗi vật rắn được xác định bởi các véctơ định vị khối tâm $\mathbf{r}_i^{(0)} = \mathbf{r}_i$ và ma trận côsin chỉ hướng $\mathbf{A}_i$

DO NOT COPY

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(\mathbf{q},\mathrm{t}) \qquad \mathbf{A}_i = \mathbf{A}_i(\mathbf{q},\mathrm{t}) \tag{3.37}$$

Đạo hàm véctơ r_i theo thời gian ờ trong hệ qui chiếu cố định R_0 ta được vận tốc khối tâm của vật rắn:

$$\mathbf{v}_i = \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \tag{3.38}$$

Ta đưa vào các ký hiệu:

$$\mathbf{J}_{T_i}^{(0)}(\mathbf{q},t) = \mathbf{J}_{T_i}(\mathbf{q},t) = \frac{\partial \mathbf{r}_i^{(0)}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r_{ix}}{\partial q_1} & \frac{\partial r_{ix}}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial r_{ix}}{\partial q_f} \\ \frac{\partial r_{iy}}{\partial q_1} & \frac{\partial r_{iy}}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial r_{iy}}{\partial q_f} \\ \frac{\partial r_{iz}}{\partial q_1} & \frac{\partial r_{iz}}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial r_{iz}}{\partial q_f} \end{bmatrix} \tag{3.39}$$

$$\overline{\mathbf{v}}_i^{(0)}(\mathbf{q},t) = \frac{\partial \mathbf{r}_i^{(0)}}{\partial t} \tag{3.40}$$

Biểu thức (3.38) bây giờ có dạng

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i^{(0)} = \mathbf{J}_{T_i}^{(0)}(\mathbf{q},t)\dot{\mathbf{q}} + \overline{\mathbf{v}}_i^{(0)}(\mathbf{q},t) \tag{3.41}$$

Ma trận $\mathbf{J}_{T_i}^{(0)}$ là ma trận cỡ 3xf và được gọi là ma trận Jacobi tịnh tiến của vật rắn B_i.

Ta gọi $\boldsymbol{\varphi}_i = \boldsymbol{\varphi}_i^{(0)}$ là véctơ đại số của véctơ quay $\vec{\varphi}_i$. Khi đó vận tốc góc của vật rắn B_i có dạng:

$$\boldsymbol{\omega}_i^{(0)} = \frac{d\boldsymbol{\varphi}_i}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_i}{\partial \mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_i}{\partial t} \tag{3.42}$$

Tương tự như trên, ta đưa vào các ký hiệu

$$\mathbf{J}_{R_i}^{(0)}(\mathbf{q},t)=\mathbf{J}_{R_i}(\mathbf{q},t)=\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}_i^{(0)}}{\partial\mathbf{q}}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\varphi_{ix}}{\partial q_1} & \dfrac{\partial\varphi_{ix}}{\partial q_2} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_{ix}}{\partial q_f}\\ \dfrac{\partial\varphi_{iy}}{\partial q_1} & \dfrac{\partial\varphi_{iy}}{\partial q_2} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_{iy}}{\partial q_f}\\ \dfrac{\partial\varphi_{iz}}{\partial q_1} & \dfrac{\partial\varphi_{iz}}{\partial q_2} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_{iz}}{\partial q_f}\end{bmatrix} \tag{3.43}$$

$$\bar{\boldsymbol{\omega}}_i^{(0)}(\mathbf{q},t)=\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}_i}{\partial t} \tag{3.44}$$

Khi đó biểu thức vận tốc góc của vật rắn B_i có dạng:

$$\boldsymbol{\omega}_i^{(0)}=\mathbf{J}_{R_i}^{(0)}(\mathbf{q},t)\dot{\mathbf{q}}+\bar{\boldsymbol{\omega}}_i^{(0)}(\mathbf{q},t) \tag{3.45}$$

Ma trận $\mathbf{J}_{R_i}^{(0)}$ là ma trận cỡ 3xf và được gọi là ma trận Jacobi quay của vật rắn B_i.

Do $\boldsymbol{\varphi}_i$ là véctơ mà các thành phần của nó là các tựa tọa độ, tức là bản thân $\boldsymbol{\varphi}_i$ trong trường hợp tổng quát có thể không xác định được, nhưng đạo hàm của nó theo thời gian luôn có thể xác định được. Vậy nên ma trận Jacobi quay thường được xác định theo cách khác với định nghĩa ở trên. Từ biểu thức (3.43) ta suy ra công thức xác định ma trận Jacôbi quay

$$\mathbf{J}_{R_i}^{(0)}(\mathbf{q},t)=\frac{\partial\boldsymbol{\omega}_i^{(0)}}{\partial\dot{\mathbf{q}}}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\omega_{ix}^{(0)}}{\partial\dot{q}_1} & \dfrac{\partial\omega_{ix}^{(0)}}{\partial\dot{q}_2} & \cdots & \dfrac{\partial\omega_{ix}^{(0)}}{\partial\dot{q}_f}\\ \dfrac{\partial\omega_{iy}^{(0)}}{\partial\dot{q}_1} & \dfrac{\partial\omega_{iy}^{(0)}}{\partial\dot{q}_2} & \cdots & \dfrac{\partial\omega_{iy}^{(0)}}{\partial\dot{q}_f}\\ \dfrac{\partial\omega_{iz}^{(0)}}{\partial\dot{q}_1} & \dfrac{\partial\omega_{iz}^{(0)}}{\partial\dot{q}_2} & \cdots & \dfrac{\partial\omega_{iz}^{(0)}}{\partial\dot{q}_f}\end{bmatrix} \tag{3.46}$$

Để thuận tiện tính toán đưa vào các ký hiệu:

$$\mathbf{J}_{T_i}^{(i)}(\mathbf{q},t)=\frac{\partial\mathbf{r}_i^{(i)}}{\partial\dot{\mathbf{q}}},\quad \mathbf{J}_{T_i}^{(0)}(\mathbf{q},t)=\frac{\partial\mathbf{r}_i^{(0)}}{\partial\dot{\mathbf{q}}}\quad (i=1,\ldots,p) \tag{3.47}$$

DO NOT COPY

$$\mathbf{J}_{R_i}^{(i)}(\mathbf{q},t)=\frac{\partial\boldsymbol{\omega}_i^{(i)}}{\partial\dot{\mathbf{q}}},\quad \mathbf{J}_{R_i}^{(0)}(\mathbf{q},t)=\frac{\partial\boldsymbol{\omega}_i^{(0)}}{\partial\dot{\mathbf{q}}}\quad (i=1,...,p) \tag{3.48}$$

Ta có hệ thức:

$$\mathbf{J}_{T_i}^{(0)}(\mathbf{q},t)=\mathbf{A}_i\mathbf{J}_{T_i}^{(i)}(\mathbf{q},t) \tag{3.49}$$

$$\mathbf{J}_{R_i}^{(0)}(\mathbf{q},t)=\mathbf{A}_i\mathbf{J}_{R_i}^{(i)}(\mathbf{q},t) \tag{3.50}$$

3.2.2. Hệ nhiều vật có cấu trúc mạch vòng

Xét hệ nhiều vật holonom có cấu trúc mạch vòng gồm p vật rắn và f bậc tự do. Ký hiệu các tọa độ suy rộng độc lập đủ (các tọa độ tối thiểu) là $q_1,q_2,...,q_f$ các tọa độ suy rộng phụ thuộc (các tọa độ dư) là $z_1,z_2,...,q_r(f+r=n)$. Ta đưa vào các ký hiệu sau:

$$\mathbf{q}=[\mathrm{q}_1,\mathrm{q}_2,...,\mathrm{q}_f]^T,\quad \mathbf{z}=[\mathrm{z}_1,\mathrm{z}_2,...,\mathrm{q}_r]^T \tag{3.51}$$

Vị trí của mỗi vật rắn B_i thuộc hệ được xác định bởi véctơ định vị khối tâm $\mathbf{r}_i$ (hoặc véctơ xác định một điểm định vị nào đó) và ma trận côsin chỉ hướng $\mathbf{A}_i$ (hoặc véctơ quay $\vec{\varphi}_i$).

$$\mathbf{r}_i=\mathbf{r}_i(\mathbf{q},\mathbf{z},t)\,,\quad i=1,...,\mathrm{p} \tag{3.52}$$

$$\mathbf{A}_i=\mathbf{A}_i(\mathbf{q},\mathbf{z},t)\,,\quad i=1,...,\mathrm{p} \tag{3.53}$$

Trong đó véctơ các tọa độ suy rộng phụ thuộc $\mathbf{z}$ thường là hàm ẩn của các tọa độ tối thiểu $\mathbf{q}$ và thời gian t:

$$\mathbf{z}=\mathbf{z}(\mathbf{q},t) \tag{3.54}$$

Đạo hàm biểu thức (3.54) theo thời gian t ở trong hệ qui chiếu cố định R_0 ta được:

$$\dot{\mathbf{z}}=\frac{\partial\mathbf{z}}{\partial\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}}+\frac{\partial\mathbf{z}}{\partial t}=\mathbf{J}_s\dot{\mathbf{q}}+\overline{\dot{\mathbf{z}}} \tag{3.55}$$

Trong đó ta đưa vào ký hiệu:

$$\mathbf{J}_s=\frac{\partial\mathbf{z}}{\partial\mathbf{q}} \tag{3.56}$$

Ma trận $\mathbf{J}_s$ được gọi là ma trận Jacobi mạch vòng. Ma trận $\mathbf{J}_s$ là ma trận cỡ $r \times f$. Đạo hàm biểu thức (3.55) theo t ở trong hệ qui chiếu cố định R_0 ta có:

$$\ddot{\mathbf{z}} = \mathbf{J}_s \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{J}}_s \dot{\mathbf{q}} + \bar{\bar{\mathbf{z}}} \tag{3.57}$$

Trong đó:

$$\bar{\bar{\mathbf{z}}} = \frac{^{R_0}d}{dt} \bar{\mathbf{z}} \tag{3.58}$$

Vận tốc khối tâm của vật rắn thứ i của hệ được xác định bởi công thức:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i &= \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = [\frac{\partial r_i}{\partial q} + \frac{\partial r_i}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial q}]\dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial r_i}{\partial t} + \frac{\partial r_i}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} \\ &= [\frac{\partial r_i}{\partial q} + \frac{\partial r_i}{\partial z} J_s]\dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial r_i}{\partial t} + \frac{\partial r_i}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} \\ &= \mathbf{J}_{T_i}(\mathbf{q}, \mathbf{z}, \mathbf{J}_s)\dot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{v}}_i(\mathbf{q}, \mathbf{z}, \bar{\dot{\mathbf{z}}}, t) \end{aligned} \tag{3.59}$$

Vận tốc góc của vật rắn thứ i của hệ có dạng:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_i &= \frac{d\boldsymbol{\varphi}_i}{dt} = [\frac{\partial \varphi_i}{\partial q} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial q}]\dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} \\ &= [\frac{\partial \varphi_i}{\partial q} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} J_s]\dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} \\ &= \mathbf{J}_{R_i}(\mathbf{q}, \mathbf{z}, \mathbf{J}_s)\dot{\mathbf{q}} + \bar{\boldsymbol{\omega}}_i(\mathbf{q}, \mathbf{z}, \bar{\dot{\mathbf{z}}}, t) \end{aligned} \tag{3.60}$$

Đạo hàm tiếp tục biểu thức (3.59) và biểu thức (3.60) theo t ở trong hệ qui chiếu cố định R_0 ta được các biểu thức xác định gia tốc khối tâm $\mathbf{a}_i$ và gia tốc góc $\boldsymbol{\alpha}_i$ của vật rắn thứ i.

Câu hỏi ôn tập

3.1. Trình bày phương pháp ma trận Denavit – Hartenberg trong phân tích động học hệ nhiều vật có cấu trúc cây.

DO NOT COPY

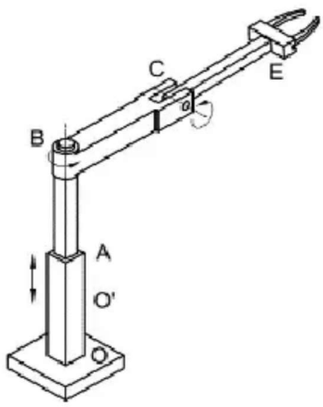
3.2. Trình bày phương pháp ma trận Craig trong phân tích động học hệ nhiều vật có cấu trúc cây.

3.3. Cho mô hình cánh tay robot như hình 3.10. Động cơ dẫn động của robot được đặt vào các khớp A, B, C. Gọi điểm tác động cuối là E. Các khâu làm bằng thép hộp đặc có mặt cắt không đổi, coi là tuyệt đối cứng.

-Thiết lập các hệ tọa độ, lập bảng thông số động học, tính các ma trận chuyển.

-Viết các phương trình động học, giải bài toán đông học thuận và động học ngược.

Cho các thông số: OA=500mm; O'B=500mm; BC=450mm; CE=500mm. Tiết diện mặt cắt các khâu: OA, AB, BC là 50x50mm; CE:40x40mm.



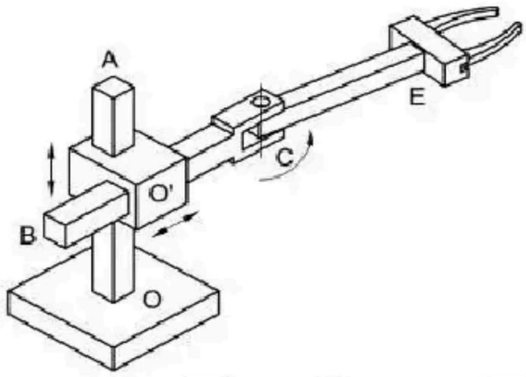
Hình 3.10. Tay máy ba bậc tự do dạng TRR

3.4. Cho mô hình cánh tay robot như hình 3.11. Động cơ dẫn động của robot được đặt vào các khớp O, O', C. Gọi điểm tác động cuối là E. Các khâu làm bằng thép hộp đặc có mặt cắt không đổi, coi là tuyệt đối cứng.

-Thiết lập các hệ tọa độ, lập bảng thông số động học, tính các ma trận chuyển.

-Viết các phương trình động học, giải bài toán đông học thuận và động học ngược cho robot

Cho các thông số: OA=450mm; BC=400mm; CE=400mm. Tiết diện mặt cắt các khâu: OA, BC là 50x50mm; CE: 40x40mm.



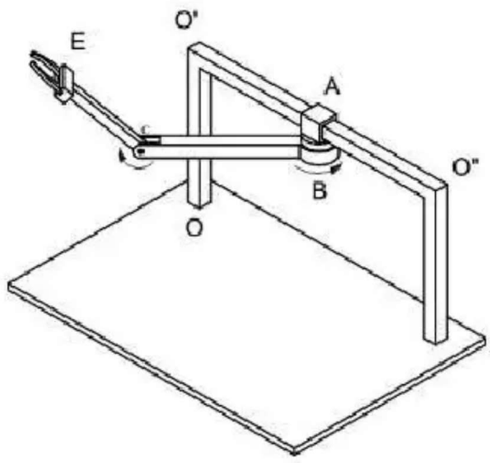
Hình 3.11. Tay máy ba bậc tự do dạng TTR

3.5. Cho mô hình cánh tay robot như hình 3.12. Động cơ dẫn động của robot được đặt vào các khớp A, B, C. Gọi điểm tác động cuối là E. Các khâu làm bằng thép hộp đặc có mặt cắt không đổi, coi là tuyệt đối cứng.

-Thiết lập các hệ tọa độ, lập bảng thông số động học, tính các ma trận chuyển.

-Viết các phương trình động học, giải bài toán đông học thuận và động học ngược cho robot

Cho các thông số: OO'=670mm; O'O"=1240mm; AB=105mm; BC=580mm; CE=370mm. Tiết diện mặt cắt các khâu: OO', O'O" là 60x60mm; AB:90x90mm; BC:60x60mm; CE:40x40mm.



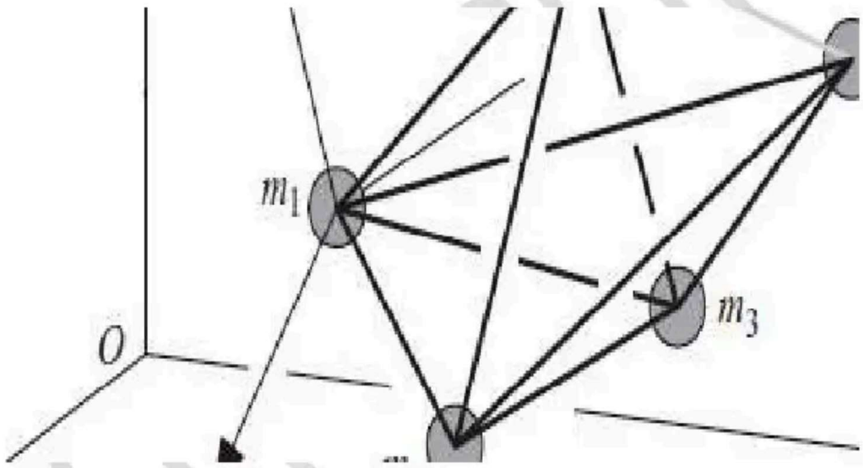
Hình 3.12. Tay máy ba bậc tự do dạng TRR

4. Chương 4
ĐỘNG LỰC HỌC VẬT RẮN

4.1. CÁC THÔNG SỐ ĐỘNG LỰC HỌC VẬT RẮN

4.1.1. Vật rắn

Trong thực tế, khi phân tích chuyển động của các vật rắn, có hai vấn đề cần bàn đến. Vấn đề thứ nhất đó là khối tâm C của vật rắn. Vấn đề thứ hai đó là *mômen quán tính khối lượng* (*second moment of mass*) xuất hiện khi vật rắn chuyển động quay. Đại lượng này cũng được gọi là *mômen khối lượng* (*mass moment*), *mômen quán tính* (*moment of inertia*) hoặc *mômen hướng tâm* (*centrifugal moment*).



Hình 4.1. Một vật rắn hình thành bởi 5 chất điểm có liên kết rắn với nhau

Ta gắn một hệ tọa độ cố định R_B với vật rắn và gọi đó là hệ tọa độ vật. Gốc của hệ tọa độ vật có thể được đặt ở một điểm bất kỳ trên vật rắn, tuy nhiên thông thường ta đặt R_B tại khối tâm của vật rắn. Do tọa độ của các chất điểm là không đổi trong hệ tọa độ vật, ta sẽ xem xét vị trí và định hướng của hệ tọa độ vật biểu diễn so với một hệ tọa độ toàn cục cố định R_0 để xác định chuyển động của vật rắn trong không gian. Hình 4.1 thể hiện một vật rắn hình thành bởi năm chất điểm có liên kết rắn với nhau.

Một vật rắn không bị ràng buộc có tất cả sáu bậc tự do trong không gian bao gồm ba chuyển động tịnh tiến và ba chuyển động quay của hệ tọa độ vật xét trong hệ tọa độ toàn cục R_0.

4.1.2. Ma trận ten xơ quán tính

Bất cứ một vật rắn nào cũng có một ma trận ten xơ quán tính kích thước 3×3 :

$$\mathbf{I}=\begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

Các phần tử trên đường chéo chính của ma trận ten xơ quán tính $I_{ij}\ (i=j)$ được gọi là các mômen quán tính cực (*polar moments of inertia*):

$$\begin{aligned} I_{xx} &= I_x = \int_B \ y^2+z^2 \ dm \\ I_{yy} &= I_y = \int_B \ z^2+x^2 \ dm \\ I_{zz} &= I_z = \int_B \ x^2+y^2 \ dm \end{aligned} \tag{4.2}$$

Và các phần tử không thuộc đường chéo chính $I_{ij}, i\neq j$ được gọi là tích quán tính (*products of inertia*):

$$\begin{aligned} I_{xy} &= I_{yx} = -\int_B xydm \\ I_{yz} &- I_{zy} - -\int_B yzdm \\ I_{zx} &= I_{xz} = -\int_B zxdm \end{aligned} \tag{4.3}$$

Chú ý, các tích phân trong (4.1) và (4.2) được lấy trên toàn bộ thể tích của vật (tương ứng với ký hiệu tích phân với chỉ số dưới *B*).

Các phần tử thuộc ma trận **I** là các mômen quán tính tương ứng với một hệ tọa độ vật đặt tại một điểm trên vật rắn. Chính vì vậy **I** là một đại lượng phụ thuộc vào vị trí đặt hệ tọa độ vật trên vật rắn và đại lượng này phải

được viết với một chỉ số biểu diễn hệ tọa độ vật mà nó được tính toán trong đó:

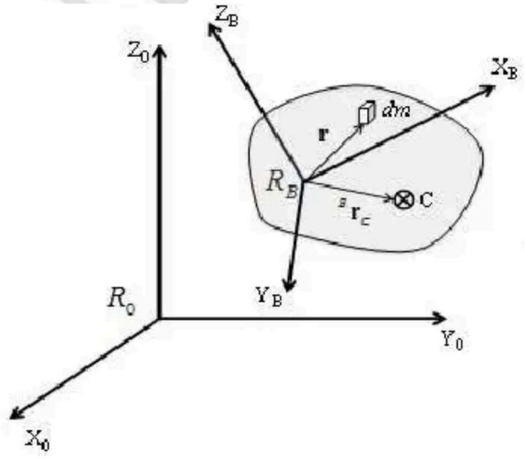
$$\mathbf{I}^{(B)} = \int_B \begin{bmatrix} y^2+z^2 & -xy & -zx \\ -xy & z^2+x^2 & -yz \\ -zx & -yz & x^2+y^2 \end{bmatrix} dm$$
$$\mathbf{I}^{(B)} = \int_B r^2 \mathbf{1}_{3\times 3} - \mathbf{r}\mathbf{r}^T \, dm \qquad (4.4)$$

Với $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T$ là véctơ vị trí của chất điểm với khối lượng *dm* trong hệ tọa độ vật R_B, $r = \|\mathbf{r}\|$ là khoảng cách từ gốc hệ tọa độ tới chất điểm *dm* và $\mathbf{1}_{3\times 3}$ là ma trận đơn vị có kích thước 3×3.

Tọa độ khối tâm của vật rắn có thể được xác định bởi công thức sau:

$$\begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m}\int_B x\,dm \\ \frac{1}{m}\int_B y\,dm \\ \frac{1}{m}\int_B z\,dm \end{bmatrix} = \mathbf{r}_C^{(B)} \qquad (4.5)$$

Trong đó, $\mathbf{r}_C^{(B)}$ là vị trí của khối tâm trong hệ tọa độ vật. Véctơ này bằng **0** nếu hệ tọa độ vật được đặt ở khối tâm C của vật rắn.



DO NOT COPY

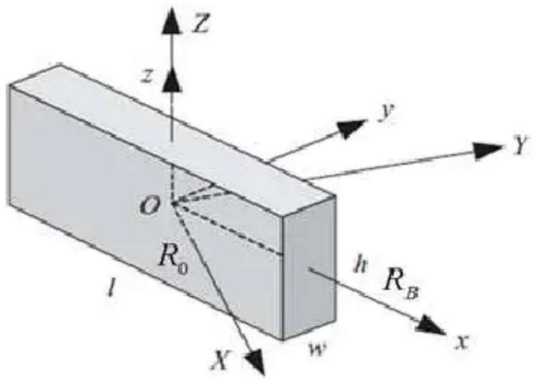
Hình 4.2. Vật rắn đồng chất và khối tâm của nó

Chú ý, đối với một vật rắn đồng chất với khối lượng riêng ρ, các phần tử của ma trận ten xơ quán tính được xác định như sau:

$$
\begin{aligned}
I_{xx} &= \iiint_V \left(y^2 + z^2\right) \rho \, dv \\
I_{yy} &= \iiint_V \left(z^2 + x^2\right) \rho \, dv \\
I_{zz} &= \iiint_V \left(x^2 + y^2\right) \rho \, dv \\
I_{xy} &= -\iiint_V xy\rho \, dv \\
I_{yz} &= -\iiint_V yz\rho \, dv \\
I_{xz} &= -\iiint_V xz\rho \, dv
\end{aligned}
\qquad (4.6)
$$

Ví dụ 4.1: Xét một viên gạch đồng chất hình hộp chữ nhật với khối lượng *m*, thể tích *V*, khối lượng riêng $\rho = m/V$, độ dài *l*, độ rộng *w*, và độ cao *h* như thể hiện trên hình 4.3.

Hệ tọa độ vật được đặt tại khối tâm của viên gạch. Ma trận ten xơ quán tính của viên gạch có thể được tính toán sử dụng phương pháp tích phân.



Hình 4.3. Viên gạch đồng chất hình hộp chữ nhật

Ta sẽ tính toán từng phần tử của I như sau:

$$I_{xx} = \int_B \ y^2 + z^2 \ dm = \int_V \ y^2 + z^2 \ \rho dV = \frac{m}{lwh} \int_V \ y^2 + z^2 \ dV$$

$$I_{xx} = \frac{m}{lwh} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-w/2}^{w/2} \int_{-l/2}^{l/2} \ y^2 + z^2 \ dx dy dz \tag{4.7}$$

$$I_{xx} = \frac{m}{12} \ w^2 + h^2$$

Một cách tương tự ta tính được:

$$I_{yy} = \frac{m}{12} \ h^2 + l^2 \tag{4.8}$$

$$I_{zz} = \frac{m}{12} \ l^2 + w^2 \tag{4.9}$$

Hệ tọa độ vật được gắn tại khối tâm của viên gạch, do đó các thành phần tích quán tính đều bằng 0. Để chứng minh điều này, ta có thể ví dụ xét I_{xy} :

$$\begin{aligned} I_{xy} &= I_{yx} = -\int_B xy \, dm = \int_v xy\rho \, dv \\ I_{xy} &= I_{yx} = \frac{m}{lwh} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-w/2}^{w/2} \int_{-l/2}^{l/2} xy \, dx dy dz = 0 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Chính vì vậy, ma trận ten xơ quán tính của viên gạch được xác định như sau:

$$\mathbf{I}^{(B)} = \begin{bmatrix} \frac{m}{12} \ w^2 + h^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12} \ h^2 + l^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12} \ l^2 + w^2 \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

Trong trường hợp $l = w = h = a$ ta có:

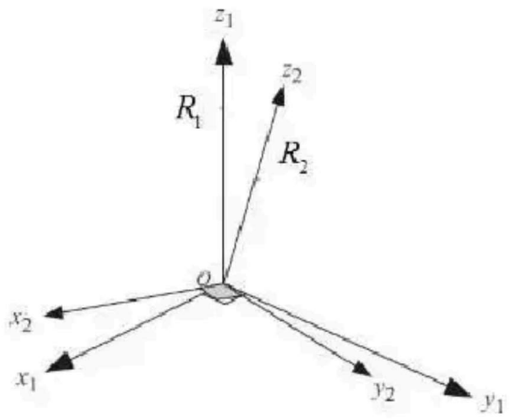
$$\mathbf{I}^{(B)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} ma^2 \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

DO NOT COPY

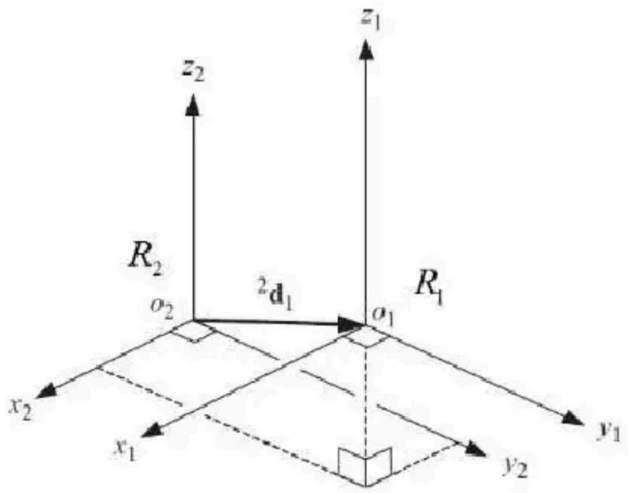
4.1.3. Phép biến đổi ma trận ten xơ quán tính trong không gian

Các mômen khối lượng có thể được biến đổi từ một hệ tọa độ R_1 sang một hệ tọa độ R_2 khác. Trong đó R_1 và R_2 cùng được đặt tại khối tâm của vật rắn. Theo định lý phép quay các hệ qui chiếu (*rotated-axes theorem*):

$$^2\mathbf{I} = {}^2\mathbf{A}_1 \, {}^1\mathbf{I} \, {}^2\mathbf{A}_1^T \qquad (4.13)$$



Hình 4.4. Hai hệ tọa độ với chung gốc đặt tại khối tâm của vật rắn



Hình 4.5. Hệ tọa độ cố định R_1 và hệ tọa độ đã dịch chuyển R_2

Các mômen khối lượng có thể được biến đổi từ một hệ tọa độ gốc R_1 sang một hệ tọa độ R_2 khác song song với hệ tọa độ R_1. Theo định lý phép dịch chuyển song song các hệ qui chiếu (*parallel-axes theorem*):

$$\begin{aligned}\mathbf{I}^{(2)} &= \mathbf{I}^{(1)} + m\tilde{\mathbf{d}}_1^{(2)}\tilde{\mathbf{d}}_1^{(2)T} \\ \mathbf{I}^{(2)} &= \mathbf{I}^{(1)} - m\tilde{\mathbf{d}}_1^{(2)}\tilde{\mathbf{d}}_1^{(2)} \\ \text{do } \tilde{\mathbf{d}}_1^{(2)T} &= -\tilde{\mathbf{d}}_1^{(2)}\end{aligned} \qquad (4.14)$$

Trong đó, $\tilde{\mathbf{d}}_1^{(2)}$ là ma trận toán tử sóng của véctơ vị trí $\mathbf{d}_1^{(2)}$ của R_1 biểu diễn trong R_2.

$$\tilde{\mathbf{d}}_1^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & -d_z^{(2)} & d_y^{(2)} \\ d_z^{(2)} & 0 & -d_x^{(2)} \\ -d_y^{(2)} & d_x^{(2)} & 0 \end{bmatrix} \qquad (4.15)$$

Chú ý: ma trận toán tử sóng của một véctơ **u** bất kỳ đôi khi cũng được gọi là ma trận tích có hướng của véctơ **u** và được ký hiệu:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}_\times &= \begin{bmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{u}\times\mathbf{v} &= \tilde{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}_\times\cdot\mathbf{v}\end{aligned} \qquad (4.16)$$

Ví dụ 4.2: Ma trận ten xơ quán tính của viên gạch đồng chất hình hộp chữ nhật trong ví dụ 4.1 tính toán trong hệ tọa độ R_B đặt tại khối tâm của nó được xác định theo công thức (4.11). Ma trận ten xơ quán tính này trong hệ tọa độ R_0 song song với R_B có thể được tính toán nhờ sử dụng phép dịch chuyển song song các hệ qui chiếu:

$$\mathbf{I}^{(0)} = \mathbf{I}^{(B)} - m\tilde{\mathbf{d}}_C^{(0)}\tilde{\mathbf{d}}_C^{(0)} \qquad (4.17)$$

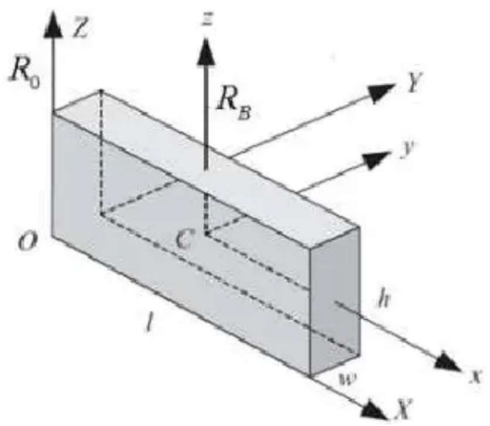
Trong đó, vectơ vị trí của khối tâm C biểu diễn trong hệ tọa độ R_0 chính là:

DO NOT COPY

$$\mathbf{d}_C^{(0)} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} l & w & h \end{bmatrix}^T \tag{4.18}$$

Bởi vậy ta có:

$$\tilde{\mathbf{d}}_C^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & -h & w \\ h & 0 & -l \\ -w & l & 0 \end{bmatrix} \tag{4.19}$$



Hình 4.6. Viên gạch đồng chất hình hộp chữ nhật trong hệ tọa độ vật và hệ tọa độ địa phương

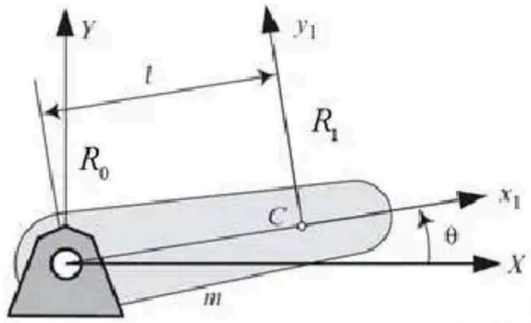
Từ đây ta tính được:

$$\mathbf{I}^{(0)} = \begin{bmatrix} \frac{m}{3}(w^2 + h^2) & -\frac{m}{4}lw & -\frac{m}{4}hl \\ -\frac{m}{4}lw & \frac{m}{3}(h^2 + l^2) & -\frac{m}{4}hw \\ -\frac{m}{4}hl & -\frac{m}{4}hw & \frac{m}{3}(l^2 + w^2) \end{bmatrix} \tag{4.20}$$

Ví dụ 4.3: Hình 4.7 biểu diễn một tay quay với hệ tọa độ vật R_1.

Giả sử $\mathbf{I}_1^{(1)}$ là ma trận ten xơ quán tính của tay quay đối với khối tâm C:

$$\mathbf{I}_1^{(1)} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \tag{4.21}$$



Hình 4.7. Tay quay quanh điểm cố định

Từ ma trận quay:

$$\mathbf{A}_1^{(0)} = \mathbf{rot}\ \mathbf{z},\theta\ = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

Ta có thể xác định $\mathbf{I}_1^{(0)}$ (là ma trận ten xơ quán tính của tay quay đối với khối tâm C nhưng được biểu diễn trong hệ qui chiếu R_0):

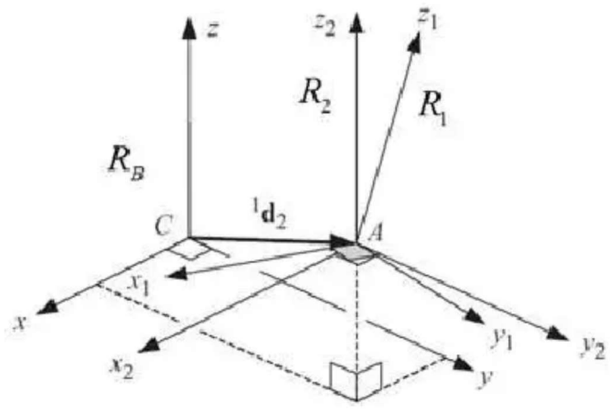
$$\mathbf{I}_1^{(0)} = \mathbf{A}_1^{(0)}\mathbf{I}_1^{(1)}\mathbf{A}_1^{(0)T} = \mathbf{A}_1^{(0)} \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \mathbf{A}_1^{(0)T}$$

$$\mathbf{I}_1^{(0)} = \begin{bmatrix} I_x\cos^2\theta + I_y\sin^2\theta & I_x - I_y\ \cos\theta\sin\theta & 0 \\ I_x - I_y\ \cos\theta\sin\theta & I_y\cos^2\theta + I_x\sin^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \tag{4.23}$$

Ví dụ 4.4: Phép biến đổi mômen khối lượng tổng quát

Xét hai hệ tọa độ vật R_B và R_1 được đặt tương ứng tại khối tâm C của vật rắn và tại một điểm A nào đó như thể hiện trong hình 4.8. Hệ tọa độ R_1 đang ở góc hướng khác với R_B. Để xác định mối quan hệ giữa các mômen quán tính khối lượng của $\mathbf{I}^{(B)}$ và $\mathbf{I}^{(1)}$ ta có thể định nghĩa một hệ tọa mới R_2 đặt tại A và song song với R_B.

DO NOT COPY



Hình 4.8. Hai hệ tọa độ vật đặt tương ứng tại khối tâm C và điểm A bất kỳ trên vật rắn

Mối quan hệ giữa $\mathbf{I}^{(1)}$ và $\mathbf{I}^{(2)}$ là một phép quay các hệ qui chiếu:

$$\mathbf{I}^{(1)} = \mathbf{A}_2^{(1)} \mathbf{I}^{(2)} \mathbf{A}_2^{(1)T} \tag{4.24}$$

Mối quan hệ giữa $\mathbf{I}^{(2)}$ và $\mathbf{I}^{(B)}$ là một phép dịch chuyển song song các hệ qui chiếu. Giả sử vectơ dịch chuyển là $\mathbf{r}_2^{(B)} = \mathbf{r}_A^{(B)} = \overrightarrow{CA}$. Ta có:

$$\mathbf{I}^{(2)} = \mathbf{I}^{(B)} - m\tilde{\mathbf{r}}_2^{(B)} \tilde{\mathbf{r}}_2^{(B)} \tag{4.25}$$

Thay thế (4.25) vào (4.24) ta có được mối quan hệ giữa $\mathbf{I}^{(1)}$ và $\mathbf{I}^{(B)}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^{(1)} &= \mathbf{A}_2^{(1)} \left(\mathbf{I}^{(B)} - m\tilde{\mathbf{r}}_2^{(B)} \tilde{\mathbf{r}}_2^{(B)} \right) \mathbf{A}_2^{(1)T} \\ \mathbf{I}^{(1)} &= \mathbf{A}_2^{(1)} \mathbf{I}^{(B)} \mathbf{A}_2^{(1)T} - m\mathbf{A}_2^{(1)} \left(\tilde{\mathbf{r}}_2^{(B)} \tilde{\mathbf{r}}_2^{(B)} \right) \mathbf{A}_2^{(1)T} \end{aligned} \tag{4.26}$$

Từ đây ta dễ dàng tính được $\mathbf{I}^{(B)}$ khi biết trước $\mathbf{I}^{(1)}$:

$$\mathbf{I}^{(B)} = \mathbf{A}_1^{(2)} \mathbf{I}^{(1)} \mathbf{A}_1^{(2)T} - m\tilde{\mathbf{r}}_2^{(B)} \tilde{\mathbf{r}}_2^{(B)} \tag{4.27}$$

4.1.4. Các tham số động lực học cơ bản của vật rắn

Dựa trên các đặc tính động lực học của vật rắn, ta có thể tham số hóa nó với các thông số động lực học cơ bản. Các tham số này có thể được chọn chính là những phần tử của khối tâm và ma trận ten xơ quán tính khối cũng

như khối lượng của vật rắn. Trong trường hợp tổng quát khi hệ tọa độ vật được đặt tại một điểm B không trùng với khối tâm C của vật rắn:

$$Y = \left[I_{xx}, I_{xy}, I_{xz}, I_{yy}, I_{yz}, I_{zz}, x_C, y_C, z_C, m \right]^T \quad (4.28)$$

Vectơ tham số động lực học cơ bản của vật rắn Y đôi khi cũng được lựa chọn từ ma trận mômen quán tính khối của vật rắn, vectơ mômen thứ nhất của vật rắn và khối lượng của nó:

$$Y = \left[I_{xx}, I_{xy}, I_{xz}, I_{yy}, I_{yz}, I_{zz}, m_x, m_y, m_Z, m \right]^T \quad (4.29)$$

Trong đó, véctơ mômen thứ nhất của vật rắn chính bằng:

$$\begin{bmatrix} m_x & m_y & m_z \end{bmatrix}^T = m \begin{bmatrix} x_C & y_C & z_C \end{bmatrix}^T \quad (4.30)$$

Trong một số tài liệu, để tiện cho việc biểu diễn các tham số động lực học cơ bản của vật rắn, đặc biệt trong bài toán lập trình, người ta cũng có thể sử dụng ký hiệu rút gọn như sau để biểu diễn vectơ tham số động lực học Y:

$$Y = XX, XY, XZ, YY, YZ, ZZ, MX, MY, MZ, m^T \quad (4.31)$$

Với ma trận ten xơ quán tính khối:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} XX & XY & XZ \\ XY & YY & YZ \\ XZ & YZ & ZZ \end{bmatrix}$$

Vectơ mômen thứ nhất:

$$MS = \begin{bmatrix} MX & MY & MZ \end{bmatrix}^T$$

Và khối lượng vật rắn m.

Chú ý: Trong các bài toán thiết kế (ví dụ thiết kế tay máy robot), thông thường chúng ta có thể xác định ngay được các phần tử của Y nhờ các công cụ tích hợp trong các phần mềm thiết kế như Inventor, SolidWorks hay Pro/E…

4.2. ĐỘNG LƯỢNG, MÔMEN ĐỘNG LƯỢNG, ĐỘNG NĂNG CỦA VẬT RẮN

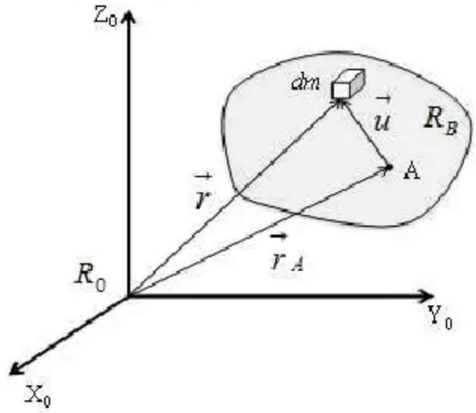
4.2.1. Động lượng của vật rắn

Động lượng của vật rắn trong hệ qui chiếu R_0 được tính bằng tích khối lượng của vật rắn với vận tốc khối tâm C của nó:

$$\begin{aligned}
&\vec{p} = \int_B \vec{v}\, dm = \int_B \left(\vec{v_A} + \vec{\omega} \times \vec{u}\right) dm \\
&\vec{p} = \vec{v_A} \int_B dm + \vec{\omega} \times \int_B \vec{u}\, dm \\
&\vec{p} = m\vec{v_A} + m\vec{\omega} \times \vec{u_C} = m\left(\vec{v_A} + \vec{\omega} \times \vec{u_C}\right) \\
&\vec{p} = m\vec{v_C}
\end{aligned} \qquad (4.32)$$

4.2.2. Mômen động lượng của vật rắn đối với một điểm thuộc vật

Xét một vật rắn có hệ tọa độ vật đặt tại điểm A trên vật rắn (Hình 4.9).



Hình 4.9. Vật rắn với hệ qui chiếu vật đặt tại điểm A

Mômen động lượng của vật rắn đối với điểm A được định nghĩa như sau:

$$\vec{l_A} = \int_B \vec{u} \times \vec{v}\, dm \qquad (4.33)$$

Do có mối quan hệ $\vec{v} = \vec{v_A} + \vec{\omega} \times \vec{u}$ nên ta có:

$$\begin{aligned}
\vec{l}_A &= \int_B \vec{u} \times \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{u} \; dm \\
\vec{l}_A &= \int_B \vec{u} \times \vec{v}_A \, dm + \int_B \vec{u} \times \vec{\omega} \times \vec{u} \; dm \\
\vec{l}_A &= \int_B \vec{u} \, dm \times \vec{v}_A + \int_B \vec{u} \times \vec{\omega} \times \vec{u} \; dm \\
\vec{l}_A &= m\vec{u}_C \times \vec{v}_A + \mathbf{I}_A \vec{\omega}
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Nếu ta chọn A trùng với khối tâm C của vật rắn thì $\vec{u}_C = \mathbf{0}$. Khi đó, mômen động lượng của vật rắn đối với điểm C có dạng đơn giản như sau:

$$\vec{l}_C = \mathbf{I}_C \vec{\omega} \tag{4.35}$$

Nếu vật rắn chuyển động quay quanh một điểm cố định O, ta có thể chọn A trùng với O. Lúc này ta lại có $\vec{v}_A = \vec{v}_O = \mathbf{0}$. Do vậy mômen động lượng của một vật rắn quay quanh một điểm O cố định có dạng:

$$\vec{l}_O = \mathbf{I}_O \vec{\omega} \tag{4.36}$$

Chiếu các phương trình vectơ lên hệ tọa độ R_B = Axyz gắn liền vào vật rắn, các biểu thức (4.34) – (4.36) có dạng ma trận như sau:

$$\mathbf{L}_A^{(B)} = m\tilde{\mathbf{u}}_C^{(B)} \mathbf{v}_A^{(B)} + \mathbf{I}_A^{(B)} \boldsymbol{\omega}^{(B)} \tag{4.37}$$

$$\mathbf{L}_C^{(B)} = \mathbf{I}_C^{(B)} \boldsymbol{\omega}^{(B)} \tag{4.38}$$

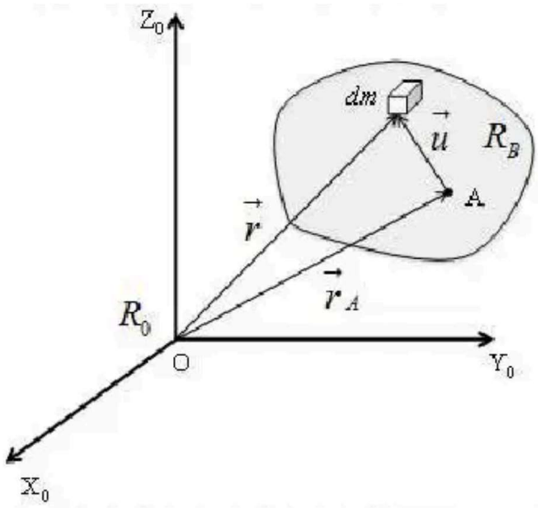
$$\mathbf{L}_O^{(B)} = \mathbf{I}_C^{(B)} \boldsymbol{\omega}^{(B)} \tag{4.39}$$

4.2.3. Mômen động lượng của vật rắn đối với một điểm không thuộc vật

Trong một số bài toán, ta cần xác định mômen động lượng của vật rắn đối với một điểm O cố định không thuộc vật rắn (Hình 4.10). Mômen động lượng của vật rắn đối với điểm O cố định được định nghĩa như sau:

$$\vec{l}_A = \int_B \vec{r} \times \vec{v} \, dm \tag{4.40}$$

DO NOT COPY



Hình 4.10. Vật rắn với hệ qui chiếu vật đặt tại A và hệ qui chiếu cố định O

Do có mối quan hệ $\vec{r} = \vec{r_A} + \vec{u},\ \vec{v} = \vec{v_A} + \vec{\omega} \times \vec{u}$ nên ta có:

$$\begin{aligned}\vec{l_O} &= \int_B \left(\vec{r_A} + \vec{u}\right) \times \left(\vec{v_A} + \vec{\omega} \times \vec{u}\right) dm \\ &= \vec{r_A} \int_B \left(\vec{v_A} + \vec{\omega} \times \vec{u}\right) dm + \int_B \vec{u} dm \times \vec{v_A} + \int_B \vec{u} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{u}\right) dm \\ &- \vec{r_A} \times \left(\vec{v_A} + \vec{\omega} \times \vec{u_C}\right) + m\vec{u_C} \times \vec{v_A} + \mathbf{I}_A \vec{\omega}\end{aligned} \qquad (4.41)$$

Nếu ta chọn A trùng với khối tâm C của vật rắn thì $\vec{u_C} = \mathbf{0}$. Khi đó, mômen động lượng của vật rắn đối với điểm O cố định có dạng:

$$\vec{l_O} = \vec{r_C} \times m\vec{v_C} + \mathbf{I}_C \vec{\omega} = \vec{r_C} \times m\vec{v_C} + \vec{l_C} \qquad (4.42)$$

Nếu vật rắn chuyển động quay quanh một điểm cố định O, ta có thể chọn A trùng với O. Lúc này ta lại có $\vec{v_A} = \vec{v_O} = \mathbf{0}, \vec{r_A} = \mathbf{0}$. Do vậy mômen động lượng của một vật rắn quay quanh một điểm O cố định có dạng:

$$\vec{l_O} = \mathbf{I}_O \vec{\omega} \qquad (4.43)$$

4.2.4. Động năng của vật rắn

Động năng của vật rắn là đại lượng vô hướng được xác định bởi công thức sau:

$$T = \frac{1}{2}\int_B \mathbf{v}^T \mathbf{v}\, dm = \frac{1}{2}\int_B \dot{\mathbf{r}}^T \dot{\mathbf{r}}\, dm \qquad (4.44)$$

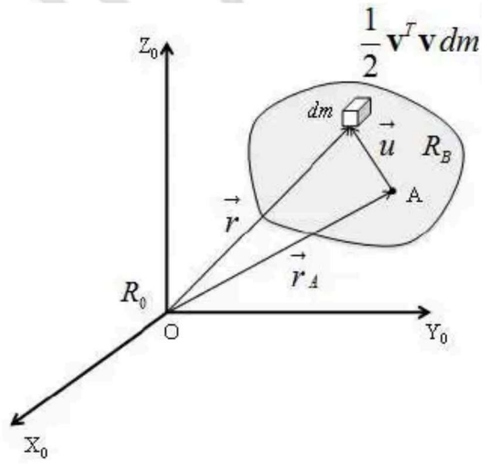
Lấy một điểm A tùy ý trên vật rắn (Hình 4.11). Ta có quan hệ:

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\vec{r}} = \vec{v} = \vec{v_A} + \vec{\omega} \times \vec{u} \qquad (4.45)$$

Trong đó, $\vec{v_A}$ là vận tốc dài của điểm A, $\vec{\omega}$ là vận tốc góc của vật rắn tính trong hệ qui chiếu R_0, $\vec{u}$ là vectơ định vị của chất điểm *dm* thuộc vật rắn đối với điểm A.

Thế (4.45) vào (4.44) ta được:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\int_B \left(\vec{v_A} + \vec{\omega} \times \vec{u}\right)^T \left(\vec{v_A} + \vec{\omega} \times \vec{u}\right) dm \\ &= \frac{1}{2} m \vec{v_A}^T \vec{v_A} + m\vec{v_A}\left(\vec{\omega} \times \vec{u_C}\right) + \frac{1}{2}\vec{\omega}^T \mathbf{I}_A \vec{\omega} \end{aligned} \qquad (4.46)$$



Hình 4.11. Động năng của vật rắn

Nếu ta chọn A trùng với khối tâm C của vật rắn thì $\overrightarrow{u_C} = \mathbf{0}$. Do đó động năng T của vật rắn có thể viết dưới dạng rút gọn:

$$T = \frac{1}{2} m \overrightarrow{v_C}^T \overrightarrow{v_C} + \frac{1}{2} \overrightarrow{\omega}^T \mathbf{I}_C \overrightarrow{\omega} \qquad (4.47)$$

Trong hệ qui chiếu cố định R_0, động năng của vật rắn có thể được biểu diễn dưới dạng ma trận như sau:

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_C^{(0)T} \mathbf{v}_C^{(0)} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^{(0)T} \mathbf{I}_C^{(0)} \boldsymbol{\omega}^{(0)} \qquad (4.48)$$

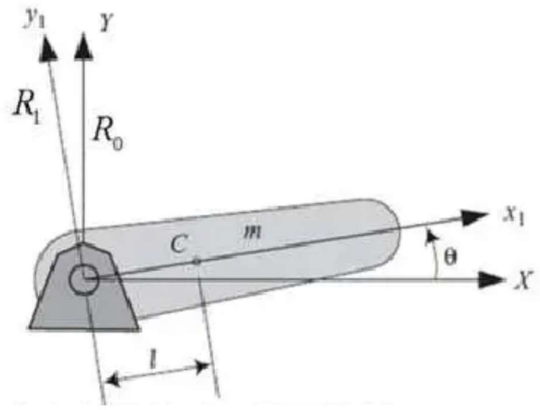
Trong hệ qui chiếu động bất kỳ R_1 gắn liền vào vật rắn ta cũng có:

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_C^{(1)T} \mathbf{v}_C^{(1)} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^{(1)T} \mathbf{I}_C^{(1)} \boldsymbol{\omega}^{(1)} \qquad (4.49)$$

Chú ý: trong bất cứ hệ qui chiếu nào thì động năng của vật rắn T giữ nguyên giá trị của nó.

Ví dụ 4.5: tính động năng của tay quay quanh điểm cố định O.

Hình 4.12 thể hiện một tay quay với hệ tọa độ vật R_1 được đặt tại vị trí có gốc trùng với gốc tọa độ của hệ tọa độ cố định R_0. Ma trận quay giữa hai hệ qui chiếu R_1 và R_0 và vectơ vận tốc góc của tay quay (biểu diễn trong hệ qui chiếu R_1) được tính như sau:



Hình 4.12. Tay quay quanh trục cố định

$$\mathbf{A}_1^{(0)} = \mathbf{rot}(\mathbf{z},\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.50}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_1^{(1)} &= \mathbf{A}_1^{(0)T}\,\dot{\mathbf{A}}_1^{(0)} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin\theta & -\cos\theta & 0 \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\theta} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta} & 0 \\ \dot{\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \boldsymbol{\omega}_1^{(1)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta} \end{bmatrix}^T \end{aligned} \tag{4.51}$$

Vận tốc dài tại khối tâm C của khâu sẽ là:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_C^{(1)} &= \mathbf{v}_1^{(1)} + \boldsymbol{\omega}_1^{(1)} \times \mathbf{r}_C^{(1)} = \boldsymbol{\omega}_1^{(1)} \times \mathbf{r}_C^{(1)} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_1^{(1)} \cdot \mathbf{r}_C^{(1)} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta} & 0 \\ \dot{\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ l\dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.52}$$

Ở đây $\mathbf{v}_1^{(1)}$ là vận tốc dài của điểm gốc tọa độ của hệ qui chiếu R_1. Điểm gốc này cố định do đó $\mathbf{v}_1^{(1)} = \mathbf{0}$.

Theo công thức (4.49) ta sẽ có:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m\, \mathbf{v}_C^{(1)T}\, \mathbf{v}_C^{(1)} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^{(1)T}\, \mathbf{I}_C\, \boldsymbol{\omega}^{(1)} \\ &= \frac{1}{2} m \begin{bmatrix} 0 & l\dot{\theta} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ l\dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_z \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \left(m l^2 + I_z \right) \dot{\theta}^2 \end{aligned} \tag{4.53}$$

DO NOT COPY

Chú ý: đôi khi ta cũng có thể tính động năng của vật thông qua các thành phần mômen khối lượng và vận tốc dài biểu diễn trong hệ qui chiếu gắn với tay quay nhưng đặt tại điểm cố định O. Ta có thể biểu diễn lại vận tốc dài của khối tâm và ma trận ten xơ quán tính của tay quay như sau:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_1^{(1)} = \mathbf{v}_C^{(1)} - \boldsymbol{\omega}_1^{(1)} \times \mathbf{r}_C^{(1)} \\ \mathbf{I}_1^{(1)} = \mathbf{I}_C - m\tilde{\mathbf{r}}_C^{(1)}\tilde{\mathbf{r}}_C^{(1)} \end{cases} \tag{4.54}$$

Từ đó ta có:

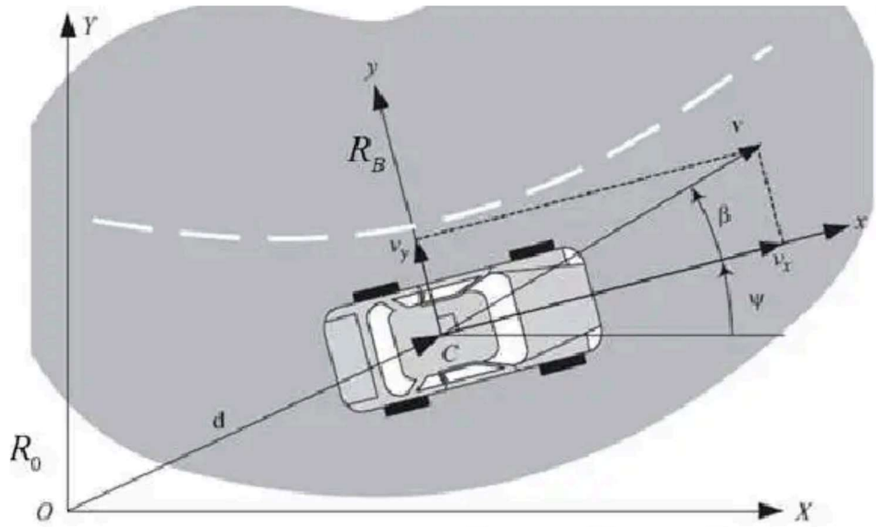
$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{\omega}_1^{(1)}\mathbf{I}_1^{(1)}\boldsymbol{\omega}_1^{(1)} + m\mathbf{v}_1^{(1)T}\mathbf{v}_1^{(1)} + 2m\mathbf{r}_C^{(1)T}\left(\mathbf{v}_1^{(1)} \times \boldsymbol{\omega}_1^{(1)}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_1^{(1)}\mathbf{I}_1^{(1)}\boldsymbol{\omega}_1^{(1)} = \frac{1}{2}I_{zz}\dot{\theta}^2 \\ &\left(\text{do } \mathbf{v}_1^{(1)} = \mathbf{0},\ \ I_{zz} = ml^2 + I_z\right) \end{aligned} \tag{4.55}$$

Trong một số tài liệu, thay vì tính toán các đại lượng liên quan đến khối tâm của vật rắn, người ta tính toán các đại lượng biểu diễn trong hệ qui chiếu đặt tại tâm quay của vật rắn. Chính vì vậy phương pháp thứ hai cũng được sử dụng khá phổ biến.

Ví dụ 4.6: Tính động năng của một xe ô tô chuyển động trong mặt phẳng.

Xét mô hình một xe ô tô chuyển động trong mặt phẳng như trên Hình 4.13. Động năng của xe khi chuyển động phẳng sẽ là:

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^{(0)T}\mathbf{I}_C^{(0)}\boldsymbol{\omega}^{(0)} + \frac{1}{2}m\mathbf{v}_C^{(0)T}\mathbf{v}_C^{(0)} \tag{4.56}$$



Hình 4.13. Mô hình một xe ô tô chuyển động phẳng

Trong đó, vận tốc dài và vận tốc góc của xe được xác định là:

$$\mathbf{v}_C^{(0)} = \begin{bmatrix} v_X \\ v_Y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{X} & \dot{Y} & 0 \end{bmatrix}^T$$
$$\boldsymbol{\omega}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\psi} \end{bmatrix}^T \qquad (4.57)$$

Và:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_C^{(0)} &= \mathbf{A}_B^{(0)} \mathbf{I}_C^{(B)} \mathbf{A}_B^{(0)T} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} I_x \cos^2\psi + I_y \sin^2\psi & \left(I_x - I_y\right)\sin\psi\cos\psi & 0 \\ \left(I_x - I_y\right)\sin\psi\cos\psi & I_y \cos^2\psi + I_x \sin^2\psi & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \end{aligned} \qquad (4.58)$$

DO NOT C

Do đó:

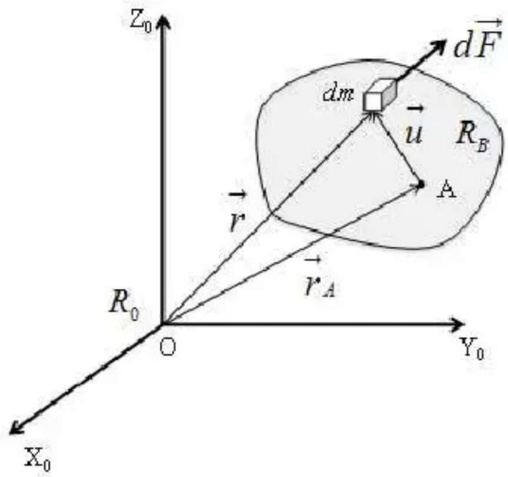
$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_Z \end{bmatrix}^T \mathbf{I}_C^{(0)} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_Z \end{bmatrix} + \frac{1}{2} m \begin{bmatrix} v_X \\ v_Y \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} v_X \\ v_Y \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} m v_X^2 + \frac{1}{2} m v_Y^2 + \frac{1}{2} I_z \omega_Z^2 \\
&= \frac{1}{2} m\left(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2\right) + \frac{1}{2} I_z \dot{\psi}^2
\end{aligned}
\qquad (4.59)
$$

4.3. ĐỊNH LÝ BIẾN THIÊN ĐỘNG LƯỢNG, MÔMEN ĐỘNG LƯỢNG

4.3.1. Định lý biến thiên động lượng của vật rắn

Từ định luật 2 Newton đối với chất điểm khối lượng *dm* trên vật rắn đồng chất ta có:

$$
\frac{d}{dt}\vec{v}\,dm = d\vec{F}^e + d\vec{F}^i \qquad (4.60)
$$



Hình 4.14. Lực tác dụng lên chất điểm *dm* trên vật rắn

Trong đó, $d\vec{F}^e$ là ngoại lực tác dụng lên dm, và $d\vec{F}^i$ là nội lực do các chất điểm tương tác với *dm* bên trong vật rắn.

Tính toán đối với toàn vật rắn đồng chất, ta có:

$$\begin{aligned}\int_B \frac{d}{dt}\vec{v}\,dm &= \frac{d}{dt}\int_B \vec{v}\,dm = \frac{d}{dt}\,m\overrightarrow{v_C} \\ &= \int_B d\vec{F}^{e} + \int_B d\vec{F}^{i}\end{aligned} \tag{4.61}$$

Đối với vật rắn đồng chất, tổng nội lực bên trong nó $\int_B d\vec{F}^{i} = \mathbf{0}$, do đó:

$$m\overrightarrow{a_C} = \int_B d\vec{F}^{e} = \vec{f}^{e} \tag{4.62}$$

Đây chính là định lý biến thiên động lượng của vật rắn được tính toán đối với khối tâm C.

Nếu biểu diễn thành phần gia tốc của khối tâm C trong một hệ tọa độ vật đặt tại điểm A thuộc vật rắn, ta có:

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{v_C} = \overrightarrow{v_A} + \vec{\omega}\times\overrightarrow{u_C} \\ &\Rightarrow \overrightarrow{a_C} = \overrightarrow{a_A} + \frac{d}{dt}\,\vec{\omega}\times\overrightarrow{u_C} = \overrightarrow{a_A} + \frac{d}{dt}\,\vec{\omega}\times\overrightarrow{u_C} + \vec{\omega}\times\frac{d}{dt}\,\overrightarrow{u_C} \\ &\quad = \overrightarrow{a_A} + \dot{\vec{\omega}}\times\overrightarrow{u_C} + \vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\overrightarrow{u_C}\end{aligned} \tag{4.63}$$

Do đó ta cũng có ngoại lực tác dụng vào vật rắn được tính như sau:

$$\vec{f}^{e} = m\left[\overrightarrow{a_A} + \dot{\vec{\omega}}\times\overrightarrow{u_C} + \vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\overrightarrow{u_C}\right] \tag{4.64}$$

Ta có thể viết lại công thức (4.60) dưới dạng ma trận:

$$F = m\left[\mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{u}_C + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{u}_C\right] \tag{4.65}$$

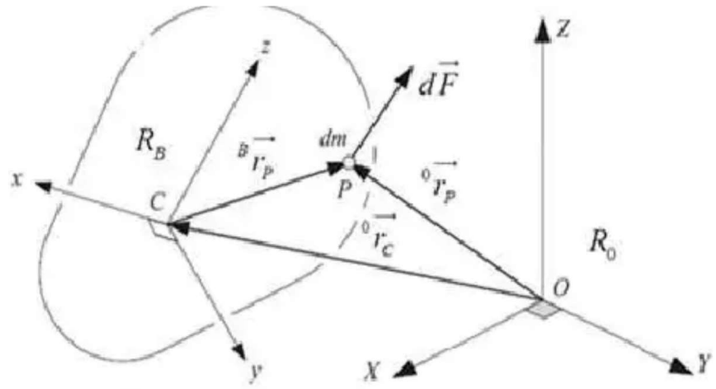
Biểu diễn lại các đại lượng trong hệ qui chiếu cố định R_0, ta có:

$$F^{(0)} = m\left[\mathbf{a}_A^{(0)} + \dot{\boldsymbol{\omega}}^{(0)}\times\mathbf{u}_C^{(0)} + \boldsymbol{\omega}^{(0)}\times\left(\boldsymbol{\omega}^{(0)}\times\mathbf{u}_C^{(0)}\right)\right] \tag{4.66}$$

Chú ý: ở đây ta có $\left(\boldsymbol{\omega}^{(0)}\times\right) = \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(0)} = \dot{\mathbf{A}}_B^{(0)}\,\mathbf{A}_B^{(0)T}$.

Ví dụ 4.7: Biểu diễn ngoại lực tác dụng lên vật rắn trong hệ tọa độ vật đặt tại khối tâm C của vật rắn.

DO NOT COPY



Hình 4.15. Một vật rắn chuyển động trong hệ qui chiếu cố định R_0

Hình 4.15 mô tả một vật rắn chuyển động trong một hệ qui chiếu toàn cục R_0. Giả sử hệ tọa độ vật được đặt tại khối tâm C của vật rắn.

Phương trình chuyển động theo định luật 2 Newton của vật rắn trong hệ tọa độ R_0 là:

$$F^{(0)} = m\mathbf{a}_C^{(0)} \tag{4.67}$$

Phương trình này có thể được biến đổi sang hệ tọa độ vật như sau:

$$\begin{aligned} F^{(B)} &= m\mathbf{A}_0^{(B)}\mathbf{a}_C^{(0)} = m\mathbf{A}_0^{(B)}\frac{^0d}{dt}\left(\mathbf{v}_C^{(0)}\right) = m\mathbf{A}_0^{(B)}\frac{^0d}{dt}\left(\mathbf{A}_0^{(B)}\mathbf{v}_C^{(B)}\right) \\ &= m\mathbf{A}_0^{(B)}\left(\dot{\mathbf{A}}_B^{(0)}\mathbf{v}_C^{(B)} + \mathbf{A}_B^{(0)}\frac{^0d}{dt}\mathbf{v}_C^{(B)}\right) \\ &= m\left(\mathbf{A}_0^{(B)}\dot{\mathbf{A}}_B^{(0)}\right)\mathbf{v}_C^{(B)} + m\left[\frac{^Bd}{dt}\mathbf{v}_C^{(B)} + \boldsymbol{\omega}^{(B)}\times\mathbf{v}_C^{(B)}\right] \\ &= m\left(\mathbf{a}_C^{(B)} + 2\boldsymbol{\omega}^{(B)}\times\mathbf{v}_C^{(B)}\right) \end{aligned} \tag{4.68}$$

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m\left(\dot{v}_x - 2\left(v_y\omega_z - v_z\omega_y\right)\right) \\ m\left(\dot{v}_y - 2\left(v_z\omega_x - v_x\omega_z\right)\right) \\ m\left(\dot{v}_z - 2\left(v_x\omega_y - v_y\omega_x\right)\right) \end{bmatrix}$$

Trong đó:

$\mathbf{a}_C^{(0)}$ - vectơ gia tốc của vật rắn tại C biểu diễn trong hệ qui chiếu toàn cục cố định.

m - khối lượng vật rắn và F là ngoại lực tác dụng lên vật rắn đặt tại C

4.3.2. Định lý biến thiên mômen động lượng của vật rắn

Từ biểu thức (4.33) tính mômen động lượng của vật rắn đối với điểm A trên vật, ta lấy đạo hàm hai vế theo thời gian trong hệ qui chiếu R_0:

$$\frac{{}^0d\vec{l}_A}{dt}=\int_B {}^0\vec{u}\times\frac{{}^0d\vec{v}}{dt}dm+\int_B\frac{{}^0d\vec{u}}{dt}\times{}^0\vec{v}\,dm \qquad (4.69)$$

Để đơn giản ký hiệu, ta qui ước viết đạo hàm trong hệ qui chiếu cố định R_0 như sau: $\frac{{}^0d\vec{l}_A}{dt}=\dot{\vec{l}}_A$, $\frac{{}^0d\vec{v}}{dt}=\dot{\vec{v}}$, $\frac{{}^0d\vec{u}}{dt}=\dot{\vec{u}}$

Ta cũng coi các đại lượng vectơ đều được biểu diễn trong hệ tọa độ R_0, công thức (4.69) có thể được viết lại như sau:

$$\dot{\vec{l}}_A=\int_B\vec{u}\times\dot{\vec{v}}\,dm+\int_B\dot{\vec{u}}\times\vec{v}\,dm \qquad (4.70)$$

Do $\dot{\vec{v}}\,dm=d\vec{F}$, nên:

$$\int_B\vec{u}\times\dot{\vec{v}}\,dm=\int_B\vec{u}\times d\vec{F}=\overrightarrow{m_A} \qquad (4.71)$$

Do $\vec{r}=\vec{r}_A+\vec{u}\Rightarrow\dot{\vec{r}}=\dot{\vec{r}}_A+\dot{\vec{u}}$ (Hình 4.14), nên:

$$\dot{\vec{u}}=\dot{\vec{r}}-\dot{\vec{r}}_A=\vec{v}-\vec{v}_A \qquad (4.72)$$

Thay (4.71), (4.72) vào (4.70) ta được:

$$\dot{\vec{l}}_A=\overrightarrow{m_A}+\int_B(\vec{v}-\vec{v}_A)\times\vec{v}\,dm=\overrightarrow{m_A}-\vec{v}_A\times\int_B\vec{v}\,dm \qquad (4.73)$$

Từ (4.73), ta có định lý biến thiên mômen của vật rắn đối với điểm A thuộc vật rắn:

$$\dot{\vec{l}}_A=\overrightarrow{m_A}-m\vec{v}_A\times\vec{v}_C \qquad (4.74)$$

Trong đó:

m - khối lượng của vật rắn.

$\overrightarrow{m_A}$ - mômen chính lấy đối với điểm A của hệ các ngoại lực tác dụng lên vật rắn.

DO NOT COPY

$\vec{v_A}$ - vận tốc điểm A biểu diễn trong hệ qui chiếu R_0.

$\vec{v_C}$ - vận tốc của khối tâm C biểu diễn trong hệ qui chiếu R_0.

Chú ý: ta cũng có mối quan hệ $\vec{v_C} = \vec{v_A} + \vec{\omega} \times \vec{u_C}$, nên (4.72) cũng có thể được viết lại dưới dạng sau:

$$\dot{\vec{l}_A} = \vec{m_A} - m\vec{v_A} \times \vec{\omega} \times \vec{u_C} \tag{4.75}$$

Tiếp tục biến đổi (4.75) và ta có $\vec{l_A} = m\vec{u_C} \times \vec{v_A} + \mathbf{I}_A \vec{\omega}$ từ công thức (4.34), do vậy:

$$\dot{\vec{l}_A} = \frac{d}{dt} \mathbf{I}_A \vec{\omega} + \frac{d}{dt} m\vec{u_C} \times \vec{v_A} \tag{4.76}$$

Để ý rằng:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{I}_A \vec{\omega} &= \mathbf{I}_A \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \mathbf{I}_A \vec{\omega} \\ \frac{d}{dt} m\vec{u_C} \times \vec{v_A} &= m\vec{u_C} \times \frac{d}{dt} \vec{v_A} + m \frac{d}{dt} \vec{u_C} \times \vec{v_A} \\ &= m\vec{u_C} \times \ddot{\vec{r}}_A + m \vec{\omega} \times \vec{u_C} \times \vec{v_A} \end{aligned} \tag{4.77}$$

Từ các công thức (4.75) – (4.77), ta có:

$$\begin{aligned} &\vec{m_A} - m\vec{v_A} \times \vec{\omega} \times \vec{u_C} \\ &= \mathbf{I}_A \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \mathbf{I}_A \vec{\omega} + m\vec{u_C} \times \ddot{\vec{r}}_A + m \vec{\omega} \times \vec{u_C} \times \vec{v_A} \\ \Rightarrow &\vec{m_A} = \mathbf{I}_A \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \mathbf{I}_A \vec{\omega} + m\vec{u_C} \times \ddot{\vec{r}}_A \end{aligned} \tag{4.78}$$

Dạng ma trận của công thức (4.78) được viết lại như sau:

$$\mathbf{m}_A = \mathbf{I}_A \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}_A \boldsymbol{\omega} + m\mathbf{u}_C \times \mathbf{a}_A \tag{4.79}$$

Nếu ta chọn điểm A trùng với khối tâm C của vật rắn thì $\vec{u_C} = \mathbf{0}$, do đó mômen của vật rắn đối với khối tâm C được tính như sau:

$$\overrightarrow{m_C} = \mathbf{I}_C \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \mathbf{I}_C \vec{\omega} \tag{4.80}$$

Dạng ma trận của công thức (4.80) với các đại lượng được biểu diễn trong hệ tọa độ vật R_B được viết lại như sau:

$$\mathbf{m}_C^{(B)} = \mathbf{I}_C^{(B)} \dot{\boldsymbol{\omega}}^{(B)} + \boldsymbol{\omega}^{(B)} \times \left(\mathbf{I}_C^{(B)} \boldsymbol{\omega}^{(B)} \right) \tag{4.81}$$

***Chú ý*:** ở đây ta có $\left(\boldsymbol{\omega}^{(B)} \times \right) = \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(B)} = \mathbf{A}_B^{(0)T} \dot{\mathbf{A}}_B^{(0)}$.

Nếu ta chọn hệ tọa độ vật đặt tại khối tâm C của vật rắn thì các đại lượng trong (4.81) sẽ là:

$$\mathbf{I}_C^{(B)} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix}, \boldsymbol{\omega}^{(B)} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}, \mathbf{m}_C^{(B)} = \begin{bmatrix} m_{Cx} \\ m_{Cy} \\ m_{Cz} \end{bmatrix}$$

Phương trình (4.81) được viết lại như sau:

$$\begin{aligned} m_{Cx} &= I_x \dot{\omega}_x - \left(I_y - I_z \right) \omega_y \omega_z \\ m_{Cy} &= I_y \dot{\omega}_y - \left(I_z - I_x \right) \omega_z \omega_x \\ m_{Cz} &= I_z \dot{\omega}_z - \left(I_x - I_y \right) \omega_x \omega_y \end{aligned} \tag{4.82}$$

Các phương trình trong (4.82) chính là các phương trình động lực Euler quen thuộc của vật rắn.

Ví dụ 4.8: Khi phân tích đặc tính động lực học của vật rắn trong không gian, ta hay biểu diễn mômen động lượng và mômen trong hệ qui chiếu vật. Vì sao lại vậy?

Ta sẽ bắt đầu với các phương trình Euler cho vật rắn trong hệ qui chiếu cố định toàn cục R_0:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}^{(0)} &= \frac{{}^0 d \mathbf{L}^{(0)}}{dt} = \dot{\mathbf{L}}^{(0)} \\ \mathbf{L}^{(0)} &= \mathbf{I}^{(0)} \boldsymbol{\omega}^{(0)} \end{aligned} \tag{4.83}$$

DO NOT COPY

Theo định lý phép quay các hệ qui chiếu, ma trận ten xơ quán tính của vật rắn trong hệ tọa độ toàn cục có mối quan hệ với ma trận ten xơ quán tính tính toán trong hệ tọa độ vật như sau:

$$\mathbf{I}^{(0)} = \mathbf{A}_B^{(0)}\,\mathbf{I}^{(B)}\,\mathbf{A}_B^{(0)T} \tag{4.84}$$

Khi vật rắn chuyển động quay trong hệ qui chiếu R_0, ma trận côsin chỉ hướng $\mathbf{A}_B^{(0)}$ sẽ thay đổi. Giả sử ma trận này được thiết lập từ các góc Euler φ,θ,ψ , $\mathbf{I}^{(0)}$ sẽ là một hàm phụ thuộc vào các góc hướng của hệ qui chiếu vật trong R_0:

$$\mathbf{I}^{(0)} = \mathbf{I}^{(0)}\left(\varphi,\theta,\psi\right) \tag{4.85}$$

Công thức (4.83) sẽ trở thành:

$$\mathbf{m}^{(0)} = \frac{{}^0 d\,\mathbf{L}^{(0)}}{dt} = \dot{\mathbf{I}}^{(0)}\,\boldsymbol{\omega}^{(0)} + \mathbf{I}^{(0)}\,\dot{\boldsymbol{\omega}}^{(0)} \tag{4.86}$$

Ta tính toán đại lượng $\dot{\mathbf{I}}^{(0)}$ như sau:

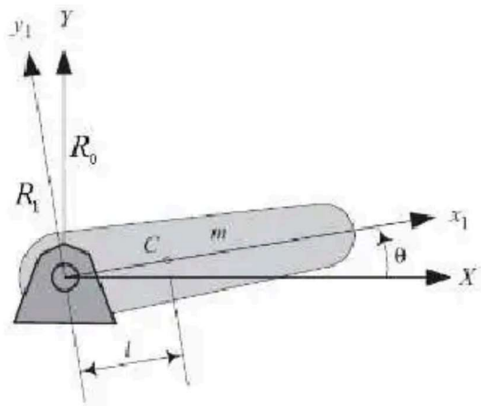
$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{I}}^{(0)} &= \frac{{}^0 d}{dt}\left(\mathbf{A}_B^{(0)}\mathbf{I}^{(B)}\,\mathbf{A}_B^{(0)T}\right) = \dot{\mathbf{A}}_B^{(0)}\mathbf{I}^{(B)}\,\mathbf{A}_B^{(0)T} + \mathbf{A}_B^{(0)}\mathbf{I}^{(B)}\,\dot{\mathbf{A}}_B^{(0)T} \\
&= \dot{\mathbf{A}}_B^{(0)}\left(\mathbf{A}_B^{(0)T}\mathbf{I}^{(0)}\,\mathbf{A}_B^{(0)}\right)\mathbf{A}_B^{(0)T} + \mathbf{A}_B^{(0)}\left(\mathbf{A}_B^{(0)T}\mathbf{I}^{(0)}\mathbf{A}_B^{(0)}\right)\dot{\mathbf{A}}_B^{(0)T} \\
&= \left(\dot{\mathbf{A}}_B^{(0)}\mathbf{A}_B^{(0)T}\right)\mathbf{I}^{(0)}\left(\mathbf{A}_B^{(0)}\,\mathbf{A}_B^{(0)T}\right) + \left(\mathbf{A}_B^{(0)}\mathbf{A}_B^{(0)T}\right)\mathbf{I}^{(0)}\left(\mathbf{A}_B^{(0)}\,\dot{\mathbf{A}}_B^{(0)T}\right) \\
&= \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(0)}\,\mathbf{I}^{(0)} + \mathbf{I}^{(0)}\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(0)T} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(0)}\,\mathbf{I}^{(0)} - \mathbf{I}^{(0)}\,\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(0)}
\end{aligned} \tag{4.87}$$

Công thức (4.86) trở thành:

$$\begin{aligned}
\mathbf{m}^{(0)} &= \frac{{}^0 d\,\mathbf{L}^{(0)}}{dt} = \dot{\mathbf{I}}^{(0)}\,\boldsymbol{\omega}^{(0)} + \mathbf{I}^{(0)}\,\dot{\boldsymbol{\omega}}^{(0)} \\
&= \left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(0)}\,\mathbf{I}^{(0)}\right)\boldsymbol{\omega}^{(0)} - \left(\mathbf{I}^{(0)}\,\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(0)}\right)\boldsymbol{\omega}^{(0)} + \mathbf{I}^{(0)}\,\dot{\boldsymbol{\omega}}^{(0)}
\end{aligned} \tag{4.88}$$

Rõ ràng sự xuất hiện của thành phần đạo hàm của ma trận ten xơ quán tính $\dot{\mathbf{I}}^{(0)}$ làm cho phương trình chuyển động của vật rắn trở nên rất phức tạp và thông thường là không giải được. Tuy nhiên nếu ta biểu diễn các đại lượng trong hệ qui chiếu vật, ví dụ như công thức (4.81), thì sẽ rất tiện lợi bởi ma trận $\mathbf{I}^{(B)}$ là một ma trận hằng số.

Ví dụ 4.9: Hình 4.16 mô tả một tay máy một khâu quay quanh một trục cố định. Hệ tọa độ vật R_1 có gốc trùng với hệ tọa độ cố định toàn cục R_0.



Hình 4.16. Tay quay quanh trục cố định

Ma trận biến đổi giữa R_1 và R_0 và vectơ vận tốc góc của tay máy được xác định như sau:

$$\mathbf{A}_1^{(0)} = \mathbf{rot}(\mathbf{z},\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.89}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_1^{(1)} = \mathbf{A}_1^{(0)T}\dot{\mathbf{A}}_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta} & 0 \\ \dot{\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.90}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\omega}_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta} \end{bmatrix}^T$$

Giả sử ma trận ten xơ quán tính của tay máy đối với khối tâm C biểu diễn trong hệ qui chiếu vật:

$$\mathbf{I}_C^{(1)} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \tag{4.91}$$

Ta có:

$$\mathbf{I}_1^{(1)} = \mathbf{I}_C - m\tilde{\mathbf{r}}_C^{(1)}\tilde{\mathbf{r}}_C^{(1)} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y + ml^2 & 0 \\ 0 & 0 & I_z + ml^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (4.92)$$

Do đó:

$$\mathbf{m}_1^{(1)} = \mathbf{I}_1^{(1)}\dot{\boldsymbol{\omega}}_1^{(1)} + \boldsymbol{\omega}_1^{(1)} \times \left(\mathbf{I}_1^{(1)}\boldsymbol{\omega}_1^{(1)}\right) \quad (4.93)$$

Hay:

$$\begin{bmatrix} m_x^{(1)} \\ m_y^{(1)} \\ m_z^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{zz}\ddot{\theta} \end{bmatrix} \quad (4.94)$$

Bây giờ ta sẽ tính vectơ mômen tác dụng lên tay máy biểu diễn trong hệ tọa độ toàn cục. Ma trận ten xơ quán tính ${}^0\mathbf{I}_1$ được tính như sau:

$$\mathbf{I}_1^{(0)} = \mathbf{A}_1^{(0)}\mathbf{I}_1^{(1)}\mathbf{A}_1^{(0)T} = \mathbf{A}_1^{(0)}\begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}\mathbf{A}_1^{(0)T} = \begin{bmatrix} I_{xx}\cos^2\theta + I_{yy}\sin^2\theta & \left(I_{xx} - I_{yy}\right)\cos\theta\sin\theta & 0 \\ \left(I_{xx} - I_{yy}\right)\cos\theta\sin\theta & I_{yy}\cos^2\theta + I_{xx}\sin^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (4.95)$$

Vận tốc góc của tay máy biểu diễn trong hệ tọa độ toàn cục:

$$\boldsymbol{\omega}_1^{(0)} = \mathbf{A}_1^{(0)}\boldsymbol{\omega}_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta} \end{bmatrix}^T \quad (4.96)$$

Từ đây ta xác định được mômen của tay máy trong hệ tọa độ toàn cục:

$$\mathbf{m}_1^{(0)} = \left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(0)}\mathbf{I}^{(0)}\right)\boldsymbol{\omega}^{(0)} - \left(\mathbf{I}^{(0)}\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(0)}\right)\boldsymbol{\omega}^{(0)} + \mathbf{I}^{(0)}\dot{\boldsymbol{\omega}}^{(0)} \quad (4.97)$$

hay:

$$\begin{bmatrix} m_x^{(0)} \\ m_y^{(0)} \\ m_z^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{zz}\ddot{\theta} \end{bmatrix} \qquad (4.98)$$

Từ (4.94) và (4.98) ta thấy khi một vật rắn chuyển động quay quanh một trục quay cố định trong không gian thì phương trình động lực Euler của nó biểu diễn trong hệ qui chiếu vật hay trong hệ qui chiếu toàn cục là như nhau.

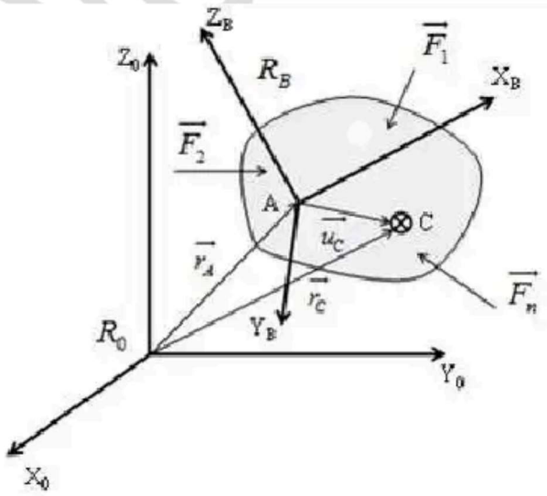
4.4. CÁC PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CHUYỂN ĐỘNG CỦA VẬT RẮN

4.4.1. Các phương trình vi phân chuyển động của vật rắn

a) Dạng đơn giản

Xét vật rắn chuyển động trong không gian như trên hình 4.17. Lấy một điểm A bất kỳ thuộc vật rắn làm điểm qui chiếu. Ký hiệu khối tâm vật rắn là C. Các lực $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},...,\overrightarrow{F_n}$ tác dụng lên vật rắn có vectơ chính là $\overrightarrow{f}$, mômen chính của hệ lực này đối với điểm A là $\overrightarrow{m_A}$, đối với khối tâm là $\overrightarrow{m_C}$:

$$\overrightarrow{f} = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{F_k}, \quad \overrightarrow{m_A} = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{m_A}\ \overrightarrow{F_k}\ , \quad \overrightarrow{m_C} = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{m_C}\ \overrightarrow{F_k} \qquad (4.99)$$



Hình 4.17. Vật rắn chuyển động trong không gian

Áp dụng định lý biến thiên động lượng, công thức (4.62), và định lý biến thiên mômen động lượng, công thức (4.80), ta có:

$$\begin{aligned} \vec{f} &= m\vec{a_C} \\ \vec{m_C} &= \mathbf{I}_C\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \mathbf{I}_C\vec{\omega} \end{aligned} \qquad (4.100)$$

Các phương trình vi phân trong (4.100) là các phương trình chuyển động Newton-Euler của vật rắn trong không gian.

b) Dạng tổng quát

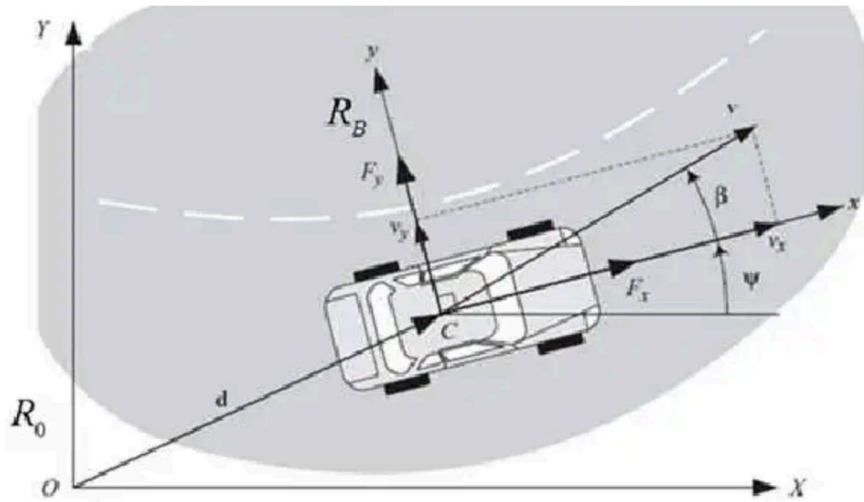
Trong một số trường hợp ta có thể chọn một điểm A bất kỳ thuộc vật rắn làm điểm định vị. Từ công thức (4.64) và (4.78) ta có hệ phương trình chuyển động Newton-Euler của vật rắn trong không gian với các đại lượng được biểu diễn trong hệ qui chiếu đặt tại điểm A bất kỳ thuộc vật rắn:

$$\begin{aligned} \vec{f} &= m\left[\vec{a_A} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{u_C} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{u_C}\right)\right] \\ \vec{m_A} &= \mathbf{I}_A\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \left(\mathbf{I}_A\vec{\omega}\right) + m\vec{u_C} \times \vec{a_A} \end{aligned} \qquad (4.101)$$

4.4.2. Một số ví dụ tiêu biểu

a) Hệ phương trình Newton-Euler của vật rắn chuyển động trên mặt phẳng

Ví dụ 4.10: Hình 4.18 mô tả một xe ô tô di chuyển trong mặt phẳng. Hệ tọa độ toàn cục R_0 được đặt tại một điểm cố định trên mặt đất và hệ tọa độ vật R_B được đặt tại khối tâm C của xe. Trục tọa độ Z và **z** song song với nhau. Góc quay giữa hệ qui chiếu R_B và R_0 chỉ góc hướng ψ (góc giữa hai trục tọa độ trục **x** và X thuộc hệ tọa độ R_B và R_0 tương ứng).



Hình 4.18. Xe ô tô chuyển động phẳng

Việc phân tích chuyển động của xe trong không gian hiệu quả hơn trong thực tế khi chúng ta biểu diễn các đại lượng trong hệ tọa độ vật. Lý do là vì các lực tác dụng như phanh, hãm, quay đều được tạo ra trên xe và có biểu diễn đơn giản trong R_B.

Vận tốc dài của xe trong hình 4.18 biểu diễn trong hệ tọa độ vật:

$$\mathbf{v}_C^{(B)} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.102}$$

Trong đó, v_x, v_y là các vận tốc dài theo trục **x** và **y** tương ứng của vectơ vận tốc dài ${}^B\mathbf{v}_C$. Các phương trình chuyển động của xe trong hệ tọa độ vật được viết lại như sau:

$$\begin{aligned} F_C^{(B)} &= \mathbf{A}_0^{(B)} F_C^{(0)} = m\dot{\mathbf{v}}_C^{(B)} + m\boldsymbol{\omega}^{(B)} \times \mathbf{v}_C^{(B)} \\ \mathbf{m}_C^{(B)} &= \frac{{}^0 d\mathbf{L}^{(B)}}{dt} = \mathbf{I}_C^{(B)} \dot{\boldsymbol{\omega}}^{(B)} + \boldsymbol{\omega}^{(B)} \times \left(\mathbf{I}_C^{(B)} \boldsymbol{\omega}^{(B)} \right) \end{aligned} \tag{4.103}$$

Với:

$$F_C^{(B)} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{m}_C^{(B)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_z \end{bmatrix},\ \dot{\mathbf{v}}_C^{(B)} = \begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{\omega}^{(B)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{bmatrix},\ \dot{\boldsymbol{\omega}}^{(B)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} \quad (4.104)$$

Giả sử R_B là hệ tọa độ cơ bản của xe trong đó ta có ma trận ten xơ quán tính là:

$$\mathbf{I}_C^{(B)} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \quad (4.105)$$

Như vậy ta có:

$$\begin{aligned} F_C^{(B)} &= m\dot{\mathbf{v}}_C^{(B)} + m\boldsymbol{\omega}^{(B)} \times \mathbf{v}_C^{(B)} = \begin{bmatrix} m\dot{v}_x - m\omega_z v_y \\ m\dot{v}_y + m\omega_z v_x \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{m}_C^{(B)} &= \mathbf{I}_C^{(B)} \dot{\boldsymbol{\omega}}^{(B)} + \boldsymbol{\omega}^{(B)} \times \left(\mathbf{I}_C^{(B)} \boldsymbol{\omega}^{(B)} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_z \dot{\omega}_z \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.106)$$

Loại bỏ các hàng có giá trị bằng 0, ta được hệ phương trình Newton-Euler:

$$\begin{aligned} F_x &= m\dot{v}_x - m\omega_z v_y \\ F_y &= m\dot{v}_y + m\omega_z v_x \\ m_z &= I_z \dot{\omega}_z \end{aligned} \quad (4.107)$$

Ví dụ 4.11: Xét xe ô tô chuyển động trong mặt phẳng cho trên hình 4.18 với hệ tọa độ toàn cục R_0 và hệ tọa độ vật R_B đặt tại khối tâm C của xe. Ta sẽ đưa ra hệ phương trình Newton-Euler của xe với các đại lượng biểu diễn trong hệ tọa độ toàn cục R_0.

Ta có ma trận chuyển đổi góc hướng giữa hai hệ qui chiếu:

$$\mathbf{A}_B^{(0)} = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.108)$$

Biểu diễn vectơ vận tốc của xe trong hệ tọa độ toàn cục:

$$\mathbf{v}_C^{(0)} = \mathbf{A}_B^{(0)}\,\mathbf{v}_C^{(B)} \tag{4.109}$$

hay:

$$\begin{bmatrix} v_X \\ v_Y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x\cos\psi - v_y\sin\psi \\ v_y\cos\psi + v_x\sin\psi \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.110}$$

Do đó vectơ gia tốc của xe biểu diễn trong hệ tọa độ toàn cục được tính như sau:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_X \\ \dot{v}_Y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\dot{v}_x - \dot{\psi}\,v_y\right)\cos\psi - \left(\dot{v}_y + \dot{\psi}\,v_x\right)\sin\psi \\ \left(\dot{v}_y + \dot{\psi}\,v_x\right)\cos\psi + \left(\dot{v}_x - \dot{\psi}\,v_y\right)\sin\psi \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.111}$$

Phương trình Newton và chuyển đổi lực tác dụng:

$$\begin{aligned} F_C^{(0)} &= m\,\dot{\mathbf{v}}_C^{(0)} \\ F_C^{(0)} &= \mathbf{A}_B^{(0)}\,F_C^{(B)} \end{aligned} \tag{4.112}$$

Do đó:

$$F_C^{(B)} = \mathbf{A}_B^{(0)T}\,F_C^{(0)} = m\,\mathbf{A}_B^{(0)T}\,\dot{\mathbf{v}}_C^{(0)} \tag{4.113}$$

Hay:

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{bmatrix} = m\,{}^0\mathbf{A}_B^T \begin{bmatrix} \left(\dot{v}_x - \dot{\psi}\,v_y\right)\cos\psi - \left(\dot{v}_y + \dot{\psi}\,v_x\right)\sin\psi \\ \left(\dot{v}_y + \dot{\psi}\,v_x\right)\cos\psi + \left(\dot{v}_x - \dot{\psi}\,v_y\right)\sin\psi \\ 0 \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} \dot{v}_x - \dot{\psi}\,v_y \\ \dot{v}_y + \dot{\psi}\,v_x \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.114}$$

Thực hiện qui trình tương tự đối với thành phần mômen ta có:

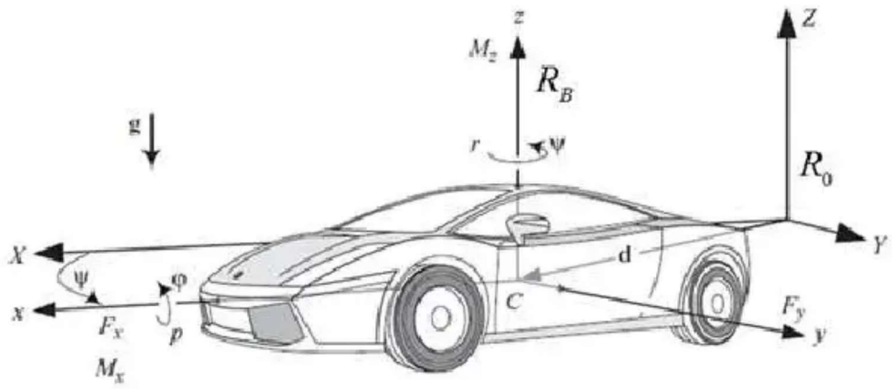
DO NOT COPY

$$\mathbf{m}_C^{(0)} = \mathbf{A}_B^{(0)}\,\mathbf{m}_C^{(B)}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_z \end{bmatrix} \qquad (4.115)$$

Với $m_z = I_z\ddot{\psi}$.

Ví dụ 4.12: Mô hình xe di động có xét đến chuyển động lắc hai bên sườn xe.



Hình 4.19. Xe di động có xét đến chuyển động lắc hai bên sườn xe

Hình 4.19 mô tả một xe ô tô với hệ tọa độ vật R_B đặt tại khối tâm của xe và hệ tọa độ toàn cục R_0. Trục tọa độ **x** trong hệ tọa độ vật đi qua khối tâm C và theo hướng dọc thân xe (cùng chiều chuyển động của xe). Khi xe đỗ trên mặt đường nằm ngang, trục **z** của hệ qui chiếu vật sẽ vuông góc với mặt đất và ngược với chiều của gia tốc trọng trường **g**. Ta sẽ tìm các phương trình chuyển động của xe trong hệ qui chiếu R_B trong trường hợp này.

Góc quay và vận tốc góc của xe được biểu diễn bởi các đại lượng φ - góc quay quanh trục **x** (*roll*), θ - góc quay quanh trục **y** (*pitch*), ψ - góc quay quanh trục **z** (*yaw*) và tốc độ thay đổi của các góc tương ứng *p* (*roll rate*), *q* (*pitch rate*), và *r* (*yaw rate*):

$$p=\dot{\varphi},\quad q=\dot{\theta},\quad r=\dot{\psi} \tag{4.116}$$

Hệ thống lực tác dụng lên xe $(F,\mathbf{m})$ là hợp lực tạo ra do các ngoại lực và mômen do mặt đất và môi trường xung quanh tác động. Trong trường hợp này, xe ô tô có bốn tham số động học: chuyển động theo trục **x**, chuyển động theo trục **y**, chuyển động quay lắc φ và xoay ψ. Trong mô hình này ta không xét đến chuyển động theo phương **z** và góc quay nghiêng dọc θ, nghĩa là:

$$z-z_0=0,\qquad \theta=0 \tag{4.117}$$

Các phương trình chuyển động của xe trong hệ tọa độ vật:

$$\begin{aligned} F_C^{(B)} &= m\dot{\mathbf{v}}_C^{(B)}+m\boldsymbol{\omega}^{(B)}\times\mathbf{v}_C^{(B)} \\ \mathbf{m}_C^{(B)} &= \mathbf{I}_C^{(B)}\dot{\boldsymbol{\omega}}^{(B)}+\boldsymbol{\omega}^{(B)}\times\left(\mathbf{I}_C^{(B)}\boldsymbol{\omega}^{(B)}\right) \end{aligned} \tag{4.118}$$

Với:

$$\begin{gathered} \mathbf{v}_C^{(B)}=\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{bmatrix},\ \dot{\mathbf{v}}_C^{(B)}=\begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{\omega}^{(B)}=\begin{bmatrix} \omega_x \\ 0 \\ \omega_z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} p \\ 0 \\ r \end{bmatrix},\ \dot{\boldsymbol{\omega}}^{(B)}=\begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ 0 \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dot{p} \\ 0 \\ \dot{r} \end{bmatrix} \\ F_C^{(B)}=\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{bmatrix},\qquad \mathbf{m}_C^{(B)}=\begin{bmatrix} m_x \\ 0 \\ m_z \end{bmatrix},\quad \mathbf{I}_C^{(B)}=\begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \end{gathered} \tag{4.119}$$

Thay các vectơ trong (4.119) vào (4.118) ta được:

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{bmatrix}=m\begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ 0 \end{bmatrix}+m\begin{bmatrix} \omega_x \\ 0 \\ \omega_z \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} m\dot{v}_x-m\omega_z v_y \\ m\dot{v}_y+m\omega_z v_x \\ m\omega_x v_y \end{bmatrix} \tag{4.120}$$

và :

DO NOT COPY

$$\begin{bmatrix} m_x \\ 0 \\ m_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ 0 \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_x \\ 0 \\ \omega_z \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ 0 \\ \omega_z \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} I_x \dot{\omega}_x \\ (I_x - I_z)\omega_x \omega_z \\ I_z \dot{\omega}_z \end{bmatrix} \quad (4.121)$$

Hai phương trình Newton đầu tiên mô ta chuyển động của xe theo trục **x** và **y**:

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m\dot{v}_x - m\omega_z v_y \\ m\dot{v}_y + m\omega_z v_x \end{bmatrix} \quad (4.122)$$

Hai phương trình Euler thứ nhất và thứ ba mô tả chuyển động quay của xe quanh trục **x** và **z**:

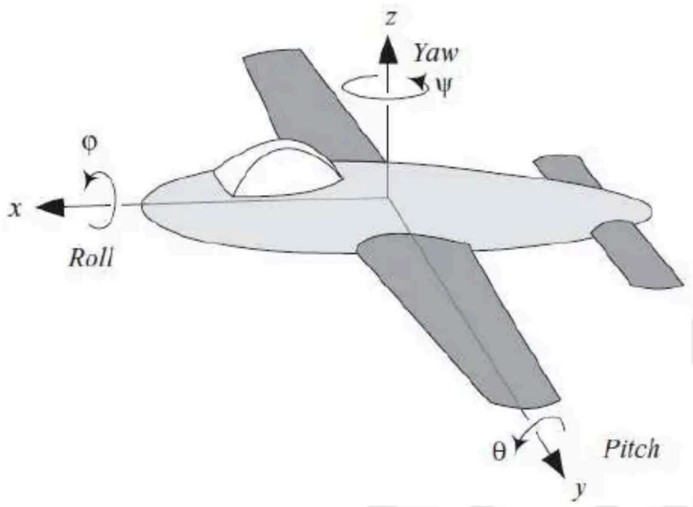
$$\begin{bmatrix} m_x \\ m_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x \dot{\omega}_x \\ I_z \dot{\omega}_z \end{bmatrix} \quad (4.123)$$

Do đó ta có hệ phương trình Newton-Euler mô tả chuyển động của xe trong hệ tọa độ vật:

$$\begin{aligned} F_x &= m\dot{v}_x - mrv_y \\ F_y &= m\dot{v}_y + mrv_x \\ m_x &= I_x \dot{\omega}_x = I_x \dot{p} \\ m_z &= I_z \dot{\omega}_z = I_z \dot{r} \end{aligned} \quad (4.124)$$

b) Hệ phương trình Newton-Euler của vật rắn chuyển động với sáu bậc tự do trong không gian

Ví dụ 4.13: Xét một máy bay chuyển động trong không gian được mô tả trong hình 4.20. Máy bay chuyển động với sáu bậc tự do. Để xây dựng các phương trình chuyển động của nó, ta định nghĩa các đại lượng động học:



Hình 4.20. Máy bay chuyển động với sáu bậc tự do

$$\mathbf{v}_C^{(B)} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix},\ \dot{\mathbf{v}}_C^{(B)} = \begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix},\ \boldsymbol{\omega}^{(B)} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix},\ \dot{\boldsymbol{\omega}}^{(B)} = \begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix}$$
$$F_C^{(B)} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix},\ \mathbf{m}_C^{(B)} = \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix},\ \mathbf{I}_C^{(B)} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \qquad (4.125)$$

Phương trình Newton viết trong hệ tọa độ vật R_B đặt tại khối tâm C của máy bay:

$$F_C^{(B)} = m\dot{\mathbf{v}}_C^{(B)} + m\boldsymbol{\omega}^{(B)} \times \mathbf{v}_C^{(B)} \qquad (4.126)$$

Hay:

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = m\begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} + m\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = m\begin{bmatrix} \dot{v}_x + \omega_y v_z - \omega_z v_y \\ \dot{v}_y + \omega_z v_x - \omega_x v_z \\ \dot{v}_z + \omega_x v_y - \omega_y v_x \end{bmatrix} \qquad (4.127)$$

Phương trình Euler viết trong hệ tọa độ vật:

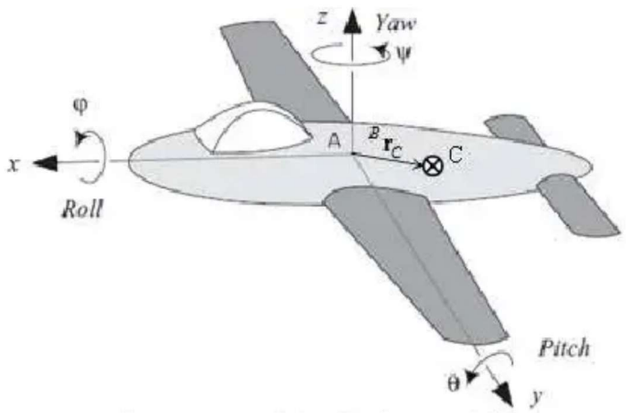
$$\mathbf{m}_C^{(B)} = \mathbf{I}_C^{(B)}\dot{\boldsymbol{\omega}}^{(B)} + \boldsymbol{\omega}^{(B)} \times \left(\mathbf{I}_C^{(B)}\boldsymbol{\omega}^{(B)}\right) \qquad (0.128)$$

Hay:

$$\begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \right)$$
$$= \begin{bmatrix} I_x \dot{\omega}_x - & I_y - I_z & \omega_y \omega_z \\ I_y \dot{\omega}_y - & I_z - I_x & \omega_z \omega_x \\ I_z \dot{\omega}_z - & I_x - I_y & \omega_x \omega_y \end{bmatrix} \quad (4.129)$$

Ví dụ 4.14: Hệ phương trình Newton-Euler của vật rắn chuyển động với sáu bậc tự do có hệ tọa độ vật không đặt tại khối tâm C của vật rắn.

Xét một máy bay chuyển động với sáu bậc tự do trong không gian như trên hình 4.21. Hệ tọa độ vật R_B được đặt tại một điểm A thuộc máy bay nhưng không trùng với khối tâm C.



Hình 4.21. Mô hình máy bay có hệ tọa độ vật không đặt tại khối tâm

Ta định nghĩa các đại lượng động học trong trường hợp này:

$$\mathbf{v}_A^{(B)} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{v}}_A^{(B)} = \begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega}^{(B)} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}, \quad \dot{\boldsymbol{\omega}}^{(B)} = \begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{r}_C^{(B)} = \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{bmatrix}, \quad F_C^{(B)} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{m}_A^{(B)} = \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix}, \mathbf{I}_A^{(B)} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (4.130)$$

Phương trình Newton mô tả chuyển động của máy bay:

$$\begin{aligned} F^{(B)} &= m\mathbf{A}_0^{(B)}\mathbf{a}_C^{(0)} = m\mathbf{A}_0^{(B)}\frac{{}^0d}{dt}\left(\mathbf{v}_C^{(0)}\right) = m\mathbf{A}_0^{(B)}\frac{{}^0d}{dt}\left(\mathbf{A}_0^{(B)}\mathbf{v}_C^{(B)}\right) \\ &= m\mathbf{A}_0^{(B)}\left(\dot{\mathbf{A}}_B^{(0)}\mathbf{v}_C^{(B)} + \mathbf{A}_0^{(B)}\frac{{}^0d}{dt}\mathbf{v}_C^{(B)}\right) \\ &= m\left(\mathbf{A}_0^{(B)}\dot{\mathbf{A}}_B^{(0)}\right)\mathbf{v}_C^{(B)} + m\left[\frac{{}^Bd}{dt}\mathbf{v}_C^{(B)} + {}^B\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_C^{(B)}\right] \\ &= m\left({}^B\dot{\mathbf{v}}_C + 2\boldsymbol{\omega}^{(B)}\times\mathbf{v}_C^{(B)}\right) \end{aligned} \tag{4.131}$$

Ta có $\mathbf{v}_C^{(B)} = \mathbf{v}_A^{(B)} + \boldsymbol{\omega}^{(B)}\times\mathbf{r}_C^{(B)}$, do đó:

$$\dot{\mathbf{v}}_C^{(B)} = \dot{\mathbf{v}}_A^{(B)} + \dot{\boldsymbol{\omega}}^{(B)}\times\mathbf{r}_C^{(B)} \tag{4.132}$$

Thay vào (4.131) ta được:

$$F_C^{(B)} = m\left[\dot{\mathbf{v}}_A^{(B)} + \dot{\boldsymbol{\omega}}^{(B)}\times\mathbf{r}_C^{(B)} + 2\boldsymbol{\omega}^{(B)}\times\mathbf{v}_A^{(B)} + 2\boldsymbol{\omega}^{(B)}\times\left(\boldsymbol{\omega}^{(B)}\times\mathbf{r}_C^{(B)}\right)\right] \tag{4.133}$$

Phương trình Euler mô tả chuyển động của máy bay:

$$\mathbf{m}_A^{(B)} = \mathbf{I}_A^{(B)}\dot{\boldsymbol{\omega}}^{(B)} + \boldsymbol{\omega}^{(B)}\times\left(\mathbf{I}_A^{(B)}\boldsymbol{\omega}^{(B)}\right) + m\mathbf{r}_C^{(B)}\times\dot{\mathbf{v}}_A^{(B)} \tag{4.134}$$

Câu hỏi ôn tập

4.1. Động năng của một vật rắn hình lập phương?

Xét một khối lập phương đồng chất kích thước $a\times a\times a$ với hệ tọa độ vật R_B đặt tại khối tâm của nó với các trục tọa độ song song với các cạnh của khối lập phương. Khối này chuyển động quay trong hệ tọa độ toàn cục R_0 với vận tốc góc ${}^0\boldsymbol{\omega}$. Xác định động năng của vật rắn này nếu mật độ của khối tâm là:

$$\rho = m/V = m/a^3 = const$$

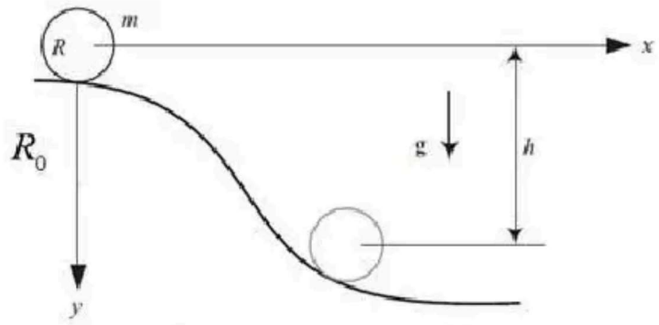
$$\rho = cr, \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\rho = x^2 \;\; a/2 - y$$

4.2. Giả sử một đĩa hình tròn trong hình 4.22 có vận tốc khởi điểm là v_0 tại tâm của nó. Chứng minh rằng vận tốc của đĩa là:

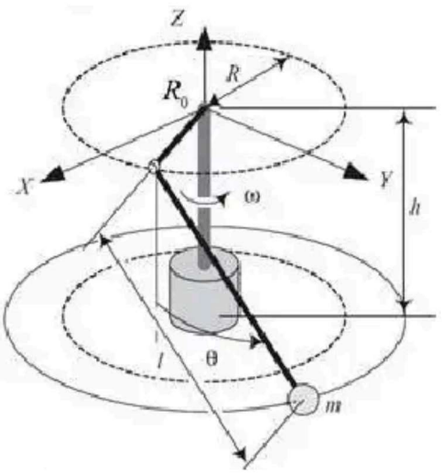
$$v_h = \sqrt{v_0^2 + \frac{2mgh}{m + I/R}}$$

nếu nó lăn (không bị trượt) xuống một độ cao h trên một đường cong. Biết rằng đĩa có khối lượng m, bán kính R và mômen I.



Hình 4.22. Đĩa tròn lăn trên một đường cong

4.3. Hình 4.23 mô tả một con lắc có độ dài l với một quả nặng treo ở đầu dưới khối lượng m. Phần đầu phía trên của con lắc gắn với một khớp cầu đang chạy theo một đường tròn với bán kính R và vận tốc góc ω. Khoảng cách giữa quả nặng và tâm khớp cầu theo phương thẳng đứng là h.



Hình 4.23 Một con lắc quay

Gắn một hệ tọa độ vật vào con lắc và xác định ma trận quay của nó đối với hệ tọa độ toàn cục R_0.

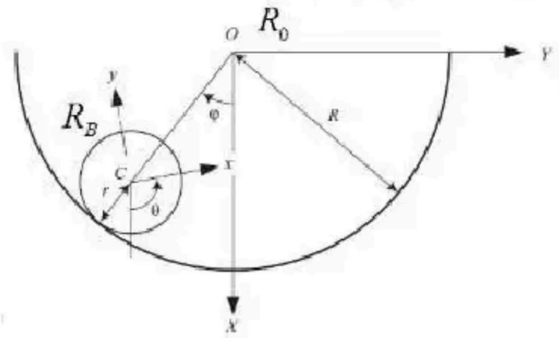
- Xác định vận tốc góc và gia tốc góc của con lắc?

- Xác định phương trình chuyển động Newton-Euler của con lắc?

- Có thể tách phương trình cho góc quay θ ra khỏi hệ phương trình cân bằng các lực khớp?

4.4: Động năng của đĩa lăn.

Hình 4.24 mô tả một đĩa khối lượng *m* và bán kính *r* đang lăn trên một đường cong có bán kính *R* với góc quay θ. Xác định động năng của đĩa.



Hình 4.24 Đĩa lăn trên đường cong

DO NOT COPY

5. Chương 5
ĐỘNG LỰC HỌC HỆ NHIỀU VẬT

Chương này trình bày các cách tiếp cận giải bài toán động lực học cơ hệ nhiều vật, tìm qui luật chuyển động của các vật rắn trong cơ hệ dưới tác dụng của các lực tác động, hay nói các khác là thành lập các phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ. Việc thành lập các phương trình động lực học cũng như mô hình hóa cơ hệ là việc chuyển mô hình vật lý của cơ hệ thành mô hình toán học dựa trên các định luật cơ học, các phép biến đổi toán học. Mô hình động lực học của cơ hệ làm cơ sở cho việc tính toán thiết kế cơ khí, việc thành lập các thuật toán điều khiển của các cơ cấu máy, robot.

5.1. PHƯƠNG PHÁP TIẾP CẬN ĐỘNG LỰC HỌC HỆ NHIỀU VẬT

Có những cách tiếp cận khác nhau để giải bài toán động lực học cơ hệ nhiều vật. Về mặt toán học, có cách tiếp dựa trên hình học véc tơ hay còn gọi là cơ học véc tơ, cách tiếp cận dựa trên giải tích còn gọi là cơ học giải tích. Về mặt chuyển động có thể phân chia thành cách tiếp cận động động lực học và cách tiếp cận tĩnh động lực học. Cách tiếp cận động động lực học xem xét cơ hệ trong trạng thái chuyển động thực, có chuyển động, có gia tốc, có lực quán tính, đại điện cách tiếp cận này là cách tiếp cận cơ học véctơ. Cách tiếp cận tĩnh động lực học là dựa trên các nguyên lý cân bằng tĩnh học, xét cơ hệ ở trạng thái dừng, đặt các lực tác động và viết các phương trình cân bằng. Do cơ hệ chuyển động lại xét ở trạng thái cân bằng tĩnh tại một thời điểm nên sinh ra các khái niệm di chuyển khả dĩ, di chuyển ảo, công ảo,…Cách tiếp cận tĩnh động lực học dựa trên các nguyên lý của Đa lăm be.

Cách tiếp cận cơ học Newton, hay còn gọi là Cơ học Véctơ, dựa vào các định luật Newton để nghiên cứu chuyển động nhờ sử dụng các đại lượng véc tơ như lực và động lượng, khảo sát từng vật thể và các lực tác dụng lên mỗi vật thể. Cách làm này đòi hỏi phải tách riêng các vật, tính các phản lực liên kết hình thành do những mối quan hệ động học, động lực học. Các phương trình Newton được áp dụng với các chuyển động tịnh tiến, còn các phương trình Euler thường được áp dụng đối với các chuyển động quay của

vật rắn. Với cách tiếp cận này, các phương trình vi phân chuyển động thường viết cho các tọa độ của hệ tọa độ Đề các, cần phải qua các phép biến đổi để biểu diễn các phương trình vi phân theo các tọa độ suy rộng. Đối với một vật rắn khi được tách ra, trong hệ tọa độ Đề các, trong không gian sẽ có 6 phương trình vi phân chuyển động, khi số lượng vật rắn trong cơ hệ là n, số phương trình vi phân chuyển động của các hệ sẽ là 6n. Việc giải các phương trình động lực học sẽ cồng kềnh hơn do số phương trình nhiều, có nhiều phản lực liên kết trong phương trình. Tuy nhiên, cách tiếp cận này giúp bản chất cơ học của hệ được thể hiện tường minh, trong trường hợp cần tìm các phản lực liên kết cách tiếp cận này có lợi thế.

Cách tiếp cận Cơ học giải tích do Leibnitz và Lagrange đề xuất, dựa trên các đại lượng vô hướng công và động năng để xây dựng các phương trình vi phân chuyển động. Cách tiếp cận này nghiên cứu toàn bộ cơ hệ, không phải tách riêng từng vật thể riêng rẽ, vì thế các phản lực liên kết không xuất hiện trong quá trình mô hình hóa cơ hệ, các tọa độ suy rộng được sử dụng thay cho các tọa độ vật lý thông thường như tọa độ Đề các, các lực suy rộng được sử dụng thay cho các lực thông thường. Sự trừu tượng toán học cao của Cơ học giải tích cho phép giải quyết hiệu quả các bài toán của cơ hệ nhiều bậc tự do, cơ hệ có nhiều loại liên kết khác nhau.

Việc thành lập các phương trình vi phân chuyển động theo các tọa độ suy rộng phù hợp với việc điều khiển các đối tượng trong thực tế. Lấy việc điều khiển các cánh tay robot làm ví dụ, các tọa độ suy rộng thường là các biến khớp, các biến khớp là các đối tượng cần điều khiển để cánh tay robot chuyển động theo quĩ đạo yêu cầu.

Các cơ hệ nhiều vật được chia thành cơ hệ hônôlôm và phi hônôlôm, cơ hệ có cấu trúc vòng hở và cơ hệ có cấu trúc vòng kín. Mỗi loại cơ hệ có các cách tiếp cận giải quyết khác nhau.

Từ phương trình Lagange trung tâm rút ra phương trình Lagrange loại I và phương trình Lagrange loại II. Phương trình Lagrange loại I sử dụng cho hệ tọa độ Đề Các, viết cho từng chất điểm, từng vật rắn, trong phương trình có các phản lực liên kết, có thể áp dụng cho cả hệ honolom và phi honolom,

tuy nhiên số phương trình lớn, khó giải, nên phương trình Lagrange loại I ít được áp dụng. Cụ thể của phương trình Lagrange loại I, xem tài liệu [2]. Phương trình Lagarange loại II, như đã đề cập, sử dụng cho hệ tọa suy rộng, thông thường số phương trình bằng số bậc tự do đối với hệ tọa độ suy rộng đủ, có cấu trúc hở, hay được áp dụng. Với hệ có cấu trúc mạch vòng thường dùng phương trình Lagrange II dạng nhân tử để giải.

Ngoài các phương trình Lagrange II, phương trình Newton – Euler, còn có các phương trình Gipp-Appell, phương trình Kane, các phương trình chính tắc Haminton. Các phương trình Gipp-Appell, Kane, Haminton có thể áp dụng cho cả hệ honolom và phi holonom.

Độ khó của việc giải các phương trình vi phân chuyển động tăng theo số bậc tự do của cơ hệ. Có nhiều phương pháp giải khác nhau như phương pháp giải tích, hoặc phương pháp số. Phương pháp giải tích có thể thực hiện với các cơ hệ đơn giản, cho nghiệm dạng giải tích. Phương pháp số thường được áp dụng giải cho các hệ phức tạp, yêu cầu của phương pháp số là phải biết các điều kiện đầu của cơ hệ. Có nhiều loại phương pháp số khác nhau có thể áp dụng để giải các hệ phương trình vi phân, cụ thể về các phương pháp số, xem tài liệu [4]. Để tính toán và mô phỏng động lực học các cơ hệ có thể sử dụng các phần mềm như: Matlab, Maple, Adams, Visual Nastran, …

Có cách đưa các phương trình vi phân bậc hai về các phương trình vi phân bậc 1 như áp dụng các phương trình Haminton.

Trong giáo trình trình bày trọng tâm phương trình Newton-Euler, và phương trình Lagange II, cho các cơ hệ honolom chịu liên kết giữ, dừng, lý tưởng. Đối với các cơ hệ phi honolom, cơ hệ chịu liên kết không giữ, không dừng và không lý tưởng để giải cần đọc thêm các tài liệu khác.

5.2. CÁC PHƯƠNG TRÌNH NEWTON – EULER

Mục này trình bày việc áp dụng các phương trình Newton – Euler thiết lập phương trình vi phân chuyển động của hệ nhiều vật hôlônôm có cấu trúc cây. Các tọa độ suy rộng xác định vị trí của hệ là các tọa độ suy rộng đủ.

Việc áp dụng các phương trình Newton – Euler thiết lập phương trình vi phân chuyển động của hệ nhiều vật hôlônôm có cấu trúc mạch vòng là bài toán khá phức tạp, không được trình bày ở đây.

5.2.1. Ma trận Jacobi tịnh tiến và ma trận Jacobi quay

Xét cơ hệ gồm p vật rắn chịu liên kết honolom, có f bậc tự do. Các tọa độ suy rộng tối thiểu của hệ là:

$$\mathbf{q} = [q_1, q_2, ..., q_f] \tag{5.1}$$

Vị trí của mỗi vật rắn được xác định bởi các véctơ định vị khối tâm $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{Ci}$ và ma trận côsin chỉ hướng $\mathbf{A}_i$

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(\mathbf{q},t) \qquad \mathbf{A}_i = \mathbf{A}_i(\mathbf{q},t) \tag{5.2}$$

Đạo hàm véctơ $\mathbf{r}_i$ theo thời gian ta được vận tốc khối tâm của vật rắn:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{Ci} = \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} = \mathbf{J}_{T_i}(\mathbf{q},t)\dot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{v}}_i(\mathbf{q},t) \tag{5.3}$$

Ma trận $\mathbf{J}_{T_i}$ cỡ 3xf là ma trận Jacobi tịnh tiến của vật rắn B_i:

$$\mathbf{J}_{T_i}(\mathbf{q},t) = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r_{ix}}{\partial q_1} & \frac{\partial r_{ix}}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial r_{ix}}{\partial q_f} \\ \frac{\partial r_{iy}}{\partial q_1} & \frac{\partial r_{iy}}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial r_{iy}}{\partial q_f} \\ \frac{\partial r_{iz}}{\partial q_1} & \frac{\partial r_{iz}}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial r_{iz}}{\partial q_f} \end{bmatrix} \tag{5.4}$$

$$\bar{\mathbf{v}}_i(\mathbf{q},t) = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \tag{5.5}$$

Đạo hàm vận tốc, xác định được gia tốc của khối tâm vật rắn i:

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_{Ci} = \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\mathbf{J}_{T_i}\dot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{v}}_i\right] = \mathbf{J}_{T_i}\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{J}}_{T_i}\dot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{a}}_i \tag{5.6}$$

Trong đó:

DO NOT COPY

$$\bar{\mathbf{a}}_i = \frac{d\bar{\mathbf{v}}_i}{dt} \tag{5.7}$$

Chú ý, ở các phương trình (5.5) và (5.7), khi trong biểu thức véctơ định vị khối tâm $\mathbf{r}_i$ chỉ chứa các biến $\mathbf{q}$, thì $\bar{\mathbf{v}}_i$ và $\bar{\mathbf{a}}_i$ bằng không.

Gọi $\boldsymbol{\varphi}_i$ là véctơ đại số của véctơ quay $\vec{\varphi}_i$. Khi đó vận tốc góc của vật rắn B_i có dạng:

$$\boldsymbol{\omega}_i = \frac{d\boldsymbol{\varphi}_i}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_i}{\partial \mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_i}{\partial t} = \mathbf{J}_{R_i}(\mathbf{q},t)\dot{\mathbf{q}} + \bar{\boldsymbol{\omega}}_i(\mathbf{q},t) \tag{5.8}$$

Ma trận $\mathbf{J}_{R_i}$ cỡ 3xf là ma trận Jacobi quay của vật rắn B_i:

$$\mathbf{J}_{R_i}(\mathbf{q},t) = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_i}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_{ix}}{\partial q_1} & \frac{\partial \varphi_{ix}}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_{ix}}{\partial q_f} \\ \frac{\partial \varphi_{iy}}{\partial q_1} & \frac{\partial \varphi_{iy}}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_{iy}}{\partial q_f} \\ \frac{\partial \varphi_{iz}}{\partial q_1} & \frac{\partial \varphi_{iz}}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_{iz}}{\partial q_f} \end{bmatrix} \tag{5.9}$$

$$\bar{\boldsymbol{\omega}}_i(\mathbf{q},t) = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_i}{\partial t} \tag{5.10}$$

Từ phương trình (5.6) suy ra:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_i}{\partial \mathbf{q}} \tag{5.11}$$

Ma trận Jacobi quay được tính theo vận tốc góc như sau:

$$\mathbf{J}_{R_i}(\mathbf{q},t)=\frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}}=\begin{bmatrix} \frac{\partial \omega_{ix}}{\partial \dot{q}_1} & \frac{\partial \omega_{ix}}{\partial \dot{q}_2} & \cdots & \frac{\partial \omega_{ix}}{\partial \dot{q}_f} \\ \frac{\partial \omega_{iy}}{\partial \dot{q}_1} & \frac{\partial \omega_{iy}}{\partial \dot{q}_2} & \cdots & \frac{\partial \omega_{iy}}{\partial \dot{q}_f} \\ \frac{\partial \omega_{iz}}{\partial \dot{q}_1} & \frac{\partial \omega_{iz}}{\partial \dot{q}_2} & \cdots & \frac{\partial \omega_{iz}}{\partial \dot{q}_f} \end{bmatrix} \tag{5.12}$$

Véc tơ vận tốc góc $\boldsymbol{\omega}_i$ được xác định như sau:

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i=\dot{\mathbf{A}}_i\mathbf{A}_i^T \tag{5.13}$$

Đạo hàm biểu thức vận tốc góc (5.8), xác định được gia tốc góc của vật rắn:

$$\boldsymbol{\alpha}_i=\frac{d\boldsymbol{\omega}_i}{dt}=\frac{d}{dt}\left[\mathbf{J}_{R_i}\dot{\mathbf{q}}+\bar{\boldsymbol{\omega}}_i\right]=\mathbf{J}_{R_i}\ddot{\mathbf{q}}+\dot{\mathbf{J}}_{R_i}\dot{\mathbf{q}}+\bar{\boldsymbol{\alpha}}_i \tag{5.14}$$

Trong đó:

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}}_i=\frac{d\bar{\boldsymbol{\omega}}_i}{dt} \tag{5.15}$$

Chú ý, ở các phương trình (5.10) và (5.15), khi trong biểu thức $\boldsymbol{\varphi}_i,\boldsymbol{\omega}_i$ chỉ chứa các biến $\mathbf{q}$, thì $\bar{\boldsymbol{\omega}}_i$ và $\bar{\boldsymbol{\alpha}}_i$ bằng không. Trong các công thức trên, vị trí, vận tốc, gia tốc của vật rắn thông thường được tính trong hệ qui chiếu cố định. Khi không viết các chỉ số thể hiện hệ qui chiếu thì các đại lượng được hiểu là tính trong hệ qui chiếu cố định.

5.2.2. Các phương trình chuyển động Newton – Euler của hệ nhiều vật

Trong chương 4, đã thiết lập phương trình Newton – Euler cho một vật rắn. Đối với hệ nhiều vật, ta tách các vật ra, giải phóng các liên kết thay liên kết bằng các lực liên kết. Áp dụng phương trình Newton – Euler, ta có phương trình vi phân chuyển động cho vật rắn thứ *i* của hệ nhiều vật.

$$m_i\mathbf{a}_i=\mathbf{F}_i=\mathbf{F}_i^a+\mathbf{F}_i^c \quad (i=1,\ldots,p) \tag{5.16}$$

DO NOT COPY

$$\mathbf{I}_i\boldsymbol{\alpha}_i + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i\mathbf{I}_i\boldsymbol{\omega}_i = \mathbf{M}_i = \mathbf{M}_i^a + \mathbf{M}_i^c \qquad (i=1,\ldots,p) \tag{5.17}$$

Trong đó: $\mathbf{a}_i$ là gia tốc khối tâm của vật rắn, $\boldsymbol{\omega}_i$ là vận tốc góc, $\boldsymbol{\alpha}_i$ là gia tốc góc của vật rắn, $\mathbf{F}_i^a$ là véc tơ chính của các ngoại lực, $\mathbf{F}_i^c$ là véc tơ chính của các lực liên kết tác dụng lên vật rắn thứ *i,* $\mathbf{M}_i^a$ là mômen chính đối với khối tâm của các lực hoạt động, $\mathbf{M}_i^c$ là mômen chính đối với khối tâm của các lực liên kết tác dụng lên vật rắn thứ *i*. Các đại lượng vận tốc, gia tốc trong các phương trình trên đều tính đối với hệ qui chiếu quán tính R_0. Các thành phần lực, mômen của ngoại lực và lực liên kết được thường được biểu diễn theo phương của các trục song song với các trục của hệ qui chiếu quán tính R_0.

Phương trình (5.16), (5.17) là phương trình Newton-Euler viết cho một vật rắn trong hệ tọa độ Đề các. Có thể viết phương trình Newton-Euler cho một vật rắn trong hệ tọa độ suy rộng.

Thế các biểu thức (5.6), (5.14) vào các phương trình (5.16) và (5.17) ta được:

$$m_i\mathbf{J}_{T_i}(\mathbf{q},t)\ddot{\mathbf{q}} + m_i\dot{\mathbf{J}}_{T_i}(\mathbf{q},t)\dot{\mathbf{q}} + m_i\bar{\mathbf{a}}_i = \mathbf{F}_i^a + \mathbf{F}_i^c \qquad (i=1,\ldots,p) \tag{5.18}$$

$$\mathbf{I}_i\mathbf{J}_{R_i}(\mathbf{q},t)\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{I}_i\dot{\mathbf{J}}_{R_i}(\mathbf{q},t)\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{I}_i\bar{\boldsymbol{\alpha}}_i + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i\mathbf{I}_i\boldsymbol{\omega}_i = \mathbf{M}_i^a + \mathbf{M}_i^c \quad (i=1,\ldots,p) \tag{5.19}$$

Trong các phương trình trên $\mathbf{I}_i$ là ma trận của tenxơ quán tính của vật rắn thứ *i* đối với khối tâm của nó trong hệ quy chiếu quán tính R_0. Chú ý rằng với các cơ hệ giữ, dừng, thông thường trong biểu thức của véc tơ định vị khối tâm của vật rắn thường chỉ chứa các tọa độ suy rộng, và không chứa biến thời gian tường minh, nên các đại lượng $\bar{\mathbf{a}}_i$ và $\bar{\boldsymbol{\alpha}}_i$ thường bằng không.

Cho *i* chạy từ *1* đến *p* và viết gộp các phương trình (5.18), (5.19) lại, ta được phương trình chuyển động của cơ hệ dạng ma trận sau

$$\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q},t)\ddot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{k}}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t) = \bar{\mathbf{Q}}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t) = \bar{\mathbf{Q}}^a + \bar{\mathbf{Q}}^c \tag{5.20}$$

Trong đó ta sử dụng các kí hiệu:

$$\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q},t)=\begin{bmatrix} m_1\mathbf{J}_{T_1} \\ \cdots \\ m_p\mathbf{J}_{T_p} \\ \mathbf{I}_1\mathbf{J}_{R_1} \\ \cdots \\ \mathbf{I}_p\mathbf{J}_{R_p} \end{bmatrix},\quad \bar{\mathbf{Q}}^a=\begin{bmatrix} \mathbf{F}_1^a \\ \cdots \\ \mathbf{F}_p^a \\ \mathbf{M}_1^a \\ \cdots \\ \mathbf{M}_p^a \end{bmatrix},\quad \bar{\mathbf{Q}}^c=\begin{bmatrix} \mathbf{F}_1^c \\ \cdots \\ \mathbf{F}_p^c \\ \mathbf{M}_1^c \\ \cdots \\ \mathbf{M}_p^c \end{bmatrix} \tag{5.21}$$

$$\bar{\mathbf{k}}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)=\begin{bmatrix} m_1\dot{\mathbf{J}}_{T_1}\dot{\mathbf{q}}+m_1\bar{\mathbf{a}}_1 \\ \cdots \\ m_p\dot{\mathbf{J}}_{T_p}\dot{\mathbf{q}}+m_p\bar{\mathbf{a}}_p \\ \mathbf{I}_1\dot{\mathbf{J}}_{R_1}\dot{\mathbf{q}}+\mathbf{I}_1\bar{\boldsymbol{\alpha}}_1+\tilde{\boldsymbol{\omega}}_1\mathbf{I}_1\boldsymbol{\omega}_1 \\ \cdots \\ \mathbf{I}_p\dot{\mathbf{J}}_{R_p}\dot{\mathbf{q}}+\mathbf{I}_p\bar{\boldsymbol{\alpha}}_p+\tilde{\boldsymbol{\omega}}_p\mathbf{I}_p\boldsymbol{\omega}_p \end{bmatrix} \tag{5.22}$$

Do $m_i\mathbf{J}_{T_i}$ và $\mathbf{I}_i\mathbf{J}_{R_i}$ là các ma trận cơ $3\times f$ nên $\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q},t)$ là ma trận cỡ $6p\times f$. Theo (5.20), mỗi một vật rắn trong cơ hệ, trong trường hợp tổng quát có 6 phương trình, khi hệ có nhiều vật rắn, số phương trình rất lớn. Có thể khử các phản lực liên kết trong phương trình (5.20), để đưa hệ gồm $6p\times f$ phương trình về hệ chỉ còn f phương trình, bằng với số bậc tự do của cơ hệ.

5.2.3. Khử các phản lực liên kết lý tưởng

Để khử các phản lực liên kết lý tưởng $\bar{\mathbf{Q}}^c$, đưa phương trình chuyển động về dạng tối giản. Trong phương trình (5.20) ta đưa vào ma trận Jacobi tổng hợp cớ $6p\times f$ được xác định bởi hệ thức sau:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{J}}(\mathbf{q},t)&=\begin{bmatrix}\mathbf{J}_{T_1}^T & \ldots & \mathbf{J}_{T_p}^T & \mathbf{J}_{R_1}^T & \ldots & \mathbf{J}_{R_P}^T\end{bmatrix}^T \\ \bar{\mathbf{J}}^T(\mathbf{q},t)&=\begin{bmatrix}\mathbf{J}_{T_1}^T & \ldots & \mathbf{J}_{T_p}^T & \mathbf{J}_{R_1}^T & \ldots & \mathbf{J}_{R_P}^T\end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5.23}$$

Nhân bên trái phương trình (5.20) với ma trận Jacobi tổng hợp $\bar{\mathbf{J}}^T$ cỡ $f\times 6p$ ta được:

$$\bar{\mathbf{J}}^T\bar{\mathbf{M}}^T\ddot{\mathbf{q}}+\bar{\mathbf{J}}^T\bar{\mathbf{k}}=\bar{\mathbf{J}}^T\bar{\mathbf{Q}}^a+\bar{\mathbf{J}}^T\bar{\mathbf{Q}}^c \qquad (5.24)$$

Bây giờ ta chứng minh phản biện hệ thức sau:

$$\bar{\mathbf{J}}^T\bar{\mathbf{Q}}^c=0 \qquad (5.25)$$

Theo định nghĩa ta có:

$$\delta\mathbf{r}_i=\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial\mathbf{q}}\delta\mathbf{q}=\mathbf{J}_{T_i}\delta\mathbf{q} \qquad (5.26)$$

$$\delta\boldsymbol{\varphi}_i=\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}_i}{\partial\mathbf{q}}\delta\mathbf{q}=\mathbf{J}_{R_i}\delta\mathbf{q} \qquad (5.27)$$

Mặt khác từ định nghĩa liên kết lý tưởng, công ảo của tất cả các phản lực liên kết trong tất cả các di chuyển ảo của hệ bằng không, ta có hệ thức:

$$\sum_{i=1}^{p}(\vec{F}_i^c\delta\vec{r}_i+\vec{M}_i^c\delta\vec{\varphi}_i)=0 \qquad (5.28)$$

Hay:

$$\sum_{i=1}^{p}\left[(\delta\mathbf{r}_i)^T\mathbf{F}_i^c+(\delta\boldsymbol{\varphi}_i)^T\mathbf{M}_i^c\right]=0 \qquad (5.29)$$

Thế các biểu thức (5.26) và (5.27) vào phương trình (5.29) ta được

$$(\delta\mathbf{q})^T\sum_{i=1}^{p}\left[\mathbf{J}_{T_i}^T\mathbf{F}_i^c+\mathbf{J}_{R_i}^T\mathbf{M}_i^c\right]=0 \qquad (5.30)$$

Do $\delta q_1,\delta q_1...\delta q_f$ là các di chuyển ảo độc lập tuyến tính, nên từ (5.15) ta suy ra:

$$\sum_{i=1}^{p}\left[\mathbf{J}_{T_i}^T\mathbf{F}_i^c+\mathbf{J}_{R_i}^T\mathbf{M}_i^c\right]=\bar{\mathbf{J}}^T\bar{\mathbf{Q}}^c=0 \qquad (5.31)$$

Ta đưa vào các kí hiệu:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q},t)=\bar{\mathbf{J}}^T\bar{\mathbf{M}},\ \ \mathbf{k}=\bar{\mathbf{J}}^T\bar{\mathbf{k}},\ \ \mathbf{h}=\bar{\mathbf{J}}^T\bar{\mathbf{Q}}^a \qquad (5.32)$$

Do $\bar{\mathbf{J}}^T$ là ma trận cỡ $f\times 6p$, $\bar{\mathbf{M}}$ là ma trận $6p\times f$ nên ma trận $\mathbf{M}$ là ma trận cỡ $f\times f$ hay ma trận vuông cấp f. Tương tự ta có $\boldsymbol{k}$ và $\boldsymbol{h}$ là các véc tơ có f thành phần.

Phương trình (5.24) bây giờ có dạng:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q},t)\ddot{\mathbf{q}}+\mathbf{k}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)=\mathbf{h}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t) \qquad (5.33)$$

Trong đó **M** là ma trận vuông cấp f, tương ứng với f bậc tự do của hệ nhiều vật. Khi thành lập phương trình vi phân chuyển động của hệ nhiều vật sử dụng phương trình Lagange loại hai cũng cho kết quả như phương trình (5.33).

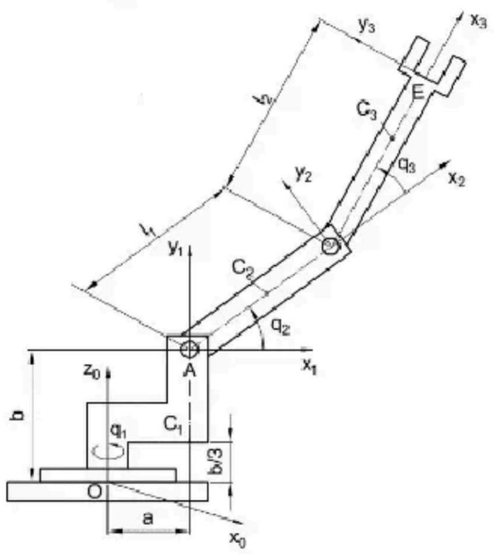
5.2.4. Các ví dụ áp dụng cho phương pháp Newton-Euler

Ví dụ 5.1: Cho robot có 3 bậc tự do, 3 khâu, cấu hình RRR, có kích thước như hình 5.1. Ký hiệu khối tâm của khâu thứ i là C_i. Khối lượng các khâu là m_i (i = 1,..,3), mômen quán tính đối với trục đi qua khối tâm I_i (i = 1,..,3). Hãy thiết lập phương trình vi phân chuyển động của robot sử dụng các phương trình Newton-Euler.

Lời giải:

Bảng 5.1. Bảng tham số Denavit-Hartenberg

Trục	θ_i	d_i	α_i	a_i
1	q_1	b	a	$\pi/2$
2	q_2	0	l_1	0
3	q_3	0	l_2	0



Hình 5.1. Robot ba bậc tự do RRR

Bảng 5.2. Tham số động lực học của robot

Khâu	Tọa độ khối tâm địa phương			Khối lượng	Ma trận momen quán tính I (kg.mm^2)					
	x_c	y_c	z_c		I_{xx}	I_{yy}	I_{zz}	I_{xy}	I_{yz}	I_{zx}
1	0	-2b/3	0	m_1	I_{xx1}	I_{yy1}	I_{zz1}	0	0	0
2	0	$-l_1/2$	0	m_2	I_{xx2}	I_{yy2}	I_{zz2}	0	0	0
3	$-l_2/2$	0	0	m_3	I_{xx3}	I_{yy3}	I_{zz3}	0	0	0

Chọn các các tọa độ suy rộng đủ như sau:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix}^T \qquad (1)$$

Ma trận chuyển trong hệ tọa độ địa phương:

$$\mathbf{H}_{01} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & \mathrm{a}c_1 \\ s_1 & 0 & -c_1 & \mathrm{a}s_1 \\ 0 & 1 & 0 & \mathrm{b} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{H}_{12} = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & \mathrm{l}_1 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & \mathrm{l}_1 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad (2)$$

$$\mathbf{H}_{23} = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & \mathrm{l}_2 c_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & \mathrm{l}_2 s_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ma trận chuyển trong hệ tọa độ toàn cục:

$$\mathbf{H}_{02} = \mathbf{H}_{01}\mathbf{H}_{12} = \begin{bmatrix} c_1c_2 & -c_1s_2 & s_1 & \mathrm{a}c_1 + l_1c_1c_2 \\ s_1c_2 & -s_1s_2 & -c_1 & \mathrm{a}s_1 + l_1s_1c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & \mathrm{b} + l_1s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_{03} = \mathbf{H}_{01}\mathbf{H}_{12}\mathbf{H}_{23} = \begin{bmatrix} c_1c_{23} & -c_1s_{23} & s_1 & \mathrm{a}c_1 + l_1c_1c_2 + l_2c_1c_{23} \\ s_1c_{23} & -s_1s_{23} & -c_1 & \mathrm{a}s_1 + l_1s_1c_2 + l_2s_1c_{23} \\ s_{23} & c_{23} & 0 & \mathrm{b} + l_1s_2 + l_2s_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Vị trí của khối tâm của khâu trong hệ tọa độ gắn liền với khâu:

$$\mathbf{u}_{C1}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2b/3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{u}_{C2}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -l_1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{u}_{C3}^{(3)} = \begin{bmatrix} -l_2/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Vị trí các khối tâm của khâu trong hệ tọa độ cố định được tính theo công thức sau:

$$\mathbf{r}_{C_i}^{(0)} = \mathbf{H}_{0i}\mathbf{u}_{C_i}^{(i)} \quad (5)$$

Từ (5.23) ta suy ra:

$$\mathbf{r}_{C1}^{(0)} = \begin{bmatrix} \mathrm{a}c_1 \\ \mathrm{a}s_1 \\ \mathrm{b}/3 \end{bmatrix}, \mathbf{r}_{C2}^{(0)} = \begin{bmatrix} (\mathrm{c}_1(2\mathrm{a} + \mathrm{l}_1\mathrm{c}_2))/2 \\ (\mathrm{s}_1(2\mathrm{a} + \mathrm{l}_1\mathrm{c}_2))/2 \\ \mathrm{b} + (\mathrm{l}_1\mathrm{s}_2)/2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{r}_{C3}^{(0)} = \begin{bmatrix} (\mathrm{c}_1(2\mathrm{a} + \mathrm{l}_2\mathrm{c}_{23} + 2\mathrm{l}_1\mathrm{c}_2))/2 \\ (\mathrm{s}_1(2\mathrm{a} + \mathrm{l}_2\mathrm{c}_{23} + 2\mathrm{l}_1\mathrm{c}_2))/2 \\ \mathrm{b} + (\mathrm{l}_2\mathrm{s}_{23})/2 + \mathrm{l}_1\mathrm{s}_2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Ma trận Jacobi tịnh tiến và đạo hàm của chúng được tính như sau

$$\mathbf{J}_{T1} = \frac{\partial \mathbf{r}_{C1}^{(0)}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -\mathrm{a}s_1 & 0 & 0 \\ \mathrm{a}c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \dot{\mathbf{J}}_{T1} = \begin{bmatrix} -\mathrm{a}\dot{q}_1c_1 & 0 & 0 \\ -\mathrm{a}\dot{q}_1\mathrm{c}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

DO NOT COPY

$$\mathbf{J}_{T2} = \frac{\partial \mathbf{r}_{C2}^{(0)}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -(s_1(2a + l_1c_2))/2 & -(l_1c_1s_2)/2 & 0 \\ (c_1(2a + l_1c_2))/2 & -(l_1s_1s_2)/2 & 0 \\ 0 & (l_1c_2)/2 & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\dot{\mathbf{J}}_{T2} = \begin{bmatrix} (-\dot{q}_1c_1(2a+l_1c_2)+\dot{q}_2l_1s_1s_2)/2 & l_1(\dot{q}_1s_1s_2-\dot{q}_2c_1c_2)/2 & 0 \\ (-\dot{q}_1s_1(2a + l_1c_2)-\dot{q}_2l_1c_1s_2)/2 & -l_1(\dot{q}_1c_1s_2-\dot{q}_2s_1c_2)/2 & 0 \\ 0 & -l_1\dot{q}_2s_2/2 & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\mathbf{J}_{T3} = \frac{\partial \mathbf{r}_{C3}^{(0)}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -s_1(2a + l_2c_{23} + 2l_1c2)/2 & -c_1(l_2s_{23} + 2l_1s_2)/2 & -l_2s_{23}c_1/2 \\ c_1(2a + l_2c_{23} + 2l_1c2)/2 & -s_1(l_2s_{23} + 2l_1s_2)/2 & -l_2s_{23}s_1/2 \\ 0 & l_2c_{23}/2 + l_1c_2 & l_2c_{23}/2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\dot{\mathbf{J}}_{T3} = \begin{bmatrix} \dot{J}_{T_311} & \dot{J}_{T_312} & \dot{J}_{T_313} \\ \dot{J}_{T_321} & \dot{J}_{T_322} & \dot{J}_{T_323} \\ \dot{J}_{T_331} & \dot{J}_{T_332} & \dot{J}_{T_333} \end{bmatrix} \quad (11)$$

Trong đó:

$$\dot{J}_{T_311} = (-\dot{q}_1c_1(2a+l_2c_{23}+2l_1c_2)-s_1(-l_2(\dot{q}_2+\dot{q}_3)s_{23}-2\dot{q}_2l_1s_2))/2$$

$$\dot{J}_{T_312} = (\dot{q}_1c_1(l_2s_{23} + 2l_1s_2)-c_1(l_2(\dot{q}_2+\dot{q}_3)c_{23}+2\dot{q}_2l_1c_2))/2$$

$$\dot{J}_{T_313} = -l_2((\dot{q}_2+\dot{q}_3)c_{23}c_1-\dot{q}_1s_{23}s_1)/2$$

$$\dot{J}_{T_321} = (-\dot{q}_1s_1(2a + l_2c_{23} + 2l_1c2)+c_1(-(\dot{q}_2+\dot{q}_3)l_2s_{23}-2\dot{q}_2l_1s_2))/2$$

$$\dot{J}_{T_322} = -\dot{q}_1c_1(l_2s_{23} + 2l_1s_2)-s_1(l_2(\dot{q}_2+\dot{q}_3)c_{23}+2\dot{q}_2l_1c_2)/2$$

$$\dot{J}_{T_323} = -l_2((\dot{q}_2+\dot{q}_3)c_{23}s_1+\dot{q}_1s_{23}c_1)/2$$

$$\dot{J}_{T_331} = 0$$

$$\dot{J}_{T_332} = -(\dot{q}_2+\dot{q}_3)l_2s_{23}/2 - \dot{q}_2l_1s_2$$

$$\dot{J}_{T_333} = -(\dot{q}_2+\dot{q}_3)l_2s_{23}/2$$

Ma trận cosin chỉ hướng của các khâu so với hệ tọa độ cơ sở:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 \\ s_1 & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} c_1c_2 & -c_1s_2 & s_1 \\ s_1c_2 & -s_1s_2 & -c_1 \\ s_2 & c_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} c_1c_{23} & -c_1s_{23} & s_1 \\ s_1c_{23} & -s_1s_{23} & -c_1 \\ s_{23} & c_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

Toán tử sóng véctơ vân tốc góc của khâu:

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_1 = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_1^{(0)} = \dot{\mathbf{A}}_1\mathbf{A}_1^T = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{q}_1 & 0 \\ \dot{q}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_2 = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_2^{(0)} = \dot{\mathbf{A}}_2\mathbf{A}_2^T = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{q}_1 & -\dot{\mathrm{q}}_2\mathrm{c}_1 \\ \dot{q}_1 & 0 & -\dot{\mathrm{q}}_2\mathrm{s}_1 \\ \dot{\mathrm{q}}_2\mathrm{c}_1 & \dot{\mathrm{q}}_2\mathrm{s}_1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad (13)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_3 = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_1^{(0)} = \dot{\mathbf{A}}_3\mathbf{A}_3^T = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{q}_1 & -\mathrm{c}_1(\dot{\mathrm{q}}_2 + \dot{\mathrm{q}}_3)_1 \\ \dot{q}_1 & 0 & -\mathrm{s}_1(\dot{\mathrm{q}}_2 + \dot{\mathrm{q}}_3 \\ \mathrm{c}_1(\dot{\mathrm{q}}_2 + \dot{\mathrm{q}}_3) & \mathrm{s}_1(\dot{\mathrm{q}}_2 + \dot{\mathrm{q}}_3 & 0 \end{bmatrix}$$

Từ (13) có vận tốc góc của các khâu:

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\omega}_2 = \begin{bmatrix} \dot{\mathrm{q}}_2\mathrm{s}_1 \\ -\dot{\mathrm{q}}_2\mathrm{c}_1 \\ \dot{\mathrm{q}}_1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\omega}_3 = \begin{bmatrix} \mathrm{s}_1(\dot{\mathrm{q}}_2 + \dot{\mathrm{q}}_3) \\ -\mathrm{c}_1(\dot{\mathrm{q}}_2 + \dot{\mathrm{q}}_3) \\ \dot{\mathrm{q}}_1 \end{bmatrix} \qquad (14)$$

Ma trận Jacobi quay và đạo hàm của chúng:

$$\mathbf{J}_{R1} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_1}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \dot{\mathbf{J}}_{R1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (15)$$

$$\mathbf{J}_{R2} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_2}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \begin{bmatrix} 0 & s_1 & 0 \\ 0 & -c_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \dot{\mathbf{J}}_{R2} = \begin{bmatrix} 0 & \dot{q}_1c_1 & 0 \\ 0 & \dot{q}_1s_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (16)$$

$$\mathbf{J}_{R3} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_3}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \begin{bmatrix} 0 & s_1 & s_1 \\ 0 & -c_1 & -c_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \dot{\mathbf{J}}_{R3} = \begin{bmatrix} 0 & \dot{q}_1c_1 & \dot{q}_1c_1 \\ 0 & \dot{q}_1s_1 & \dot{q}_1s_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (17)$$

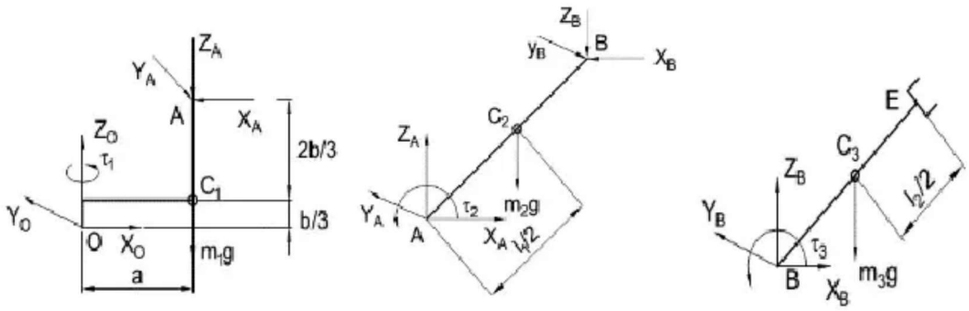
DO NOT COPY

Ma trận quán tính có dạng:

$$\mathbf{I}_{C1}=\begin{bmatrix} I_{xx1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz1} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{I}_{C2}=\begin{bmatrix} I_{xx2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz2} \end{bmatrix};\mathbf{I}_{C3}=\begin{bmatrix} I_{xx3} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy3} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz3} \end{bmatrix} \quad (18)$$

Tách các khâu của robot như hình 5.2.



Khâu 1 Khâu 2 Khâu 3

Hình 5.2. Tách các khâu của robot

Các véctơ chính và các mômen chính đối với khối tâm của các lực có dạng:

$$\mathbf{f}_1=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_1 g \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} X_O - X_A \\ Y_O - Y_A \\ Z_O - Z_A \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}_1=\begin{bmatrix} \mathrm{Y_0 b/3+Y_A 2b/3-Z_O a.sinq_1} \\ -X_0 b/3 - X_A 2b/3 + Z_O a.\mathrm{cosq_1} \\ \tau_1 + X_0 \mathrm{a.sinq_1} - Y_O a.\mathrm{cosq_1} \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\mathbf{f}_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_2 g \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} X_A - X_B \\ Y_A - Y_B \\ Z_A - Z_B \end{bmatrix}, \quad (20)$$

$$\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} \tau_2 \text{sinq}_1 + (\text{Y}_\text{A}+\text{Y}_\text{B})(\text{l}_1\text{sinq}_2)/2\text{-}(\text{Z}_\text{A}+\text{Z}_\text{B})(\text{l}_1\text{sinq}_1\text{cosq}_2)/2 \\ -\tau_2\text{cosq}_1\text{-}(\text{X}_A+\text{X}_B)(\text{l}_1\text{sinq}_2)/2+(Z_A+Z_B)(\text{l}_1\text{cosq}_1\text{cosq}_2) \\ (\text{X}_A+\text{X}_B)(\text{l}_1\text{sinq}_1\text{cosq}_2)/2\text{-}(Y_A+\text{Y}_B)(\text{l}_1\text{cosq}_1\text{cosq}_2)/2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_3 g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_B \\ Y_B \\ Z_B \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}_3 = \begin{bmatrix} \tau_3 \text{sinq}_1 + \text{Y}_B(\text{l}_2\text{sin}(\text{q}_2+\text{q}_3))/2\text{-}\text{Z}_B(\text{sinq}_1\text{l}_2\text{cos}(\text{q}_2+\text{q}_3))/2 \\ \text{-}\tau_3\text{cosq}_1\text{-}\text{X}_\text{B}(\text{l}_2\text{sin}(\text{q}_2+\text{q}_3))/2+\text{Z}_\text{B}(\text{l}_2\text{cosq}_1\text{cos}(\text{q}_2+\text{q}_3))/2 \\ \text{X}_B(\text{sinq}_1\text{l}_2\text{cos}(\text{q}_2+\text{q}_3))/2\text{-}\text{Y}_B(\text{l}_2\text{cosq}_1\text{cos}(\text{q}_2+\text{q}_3))/2 \end{bmatrix} \quad (21)$$

Với:

$$\mathbf{f}_{1a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_1 g \end{bmatrix}, \mathbf{f}_{1c} = \begin{bmatrix} X_O - X_A \\ Y_O - Y_A \\ Z_O - Z_A \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\mathbf{f}_{2a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_2 g \end{bmatrix}, \mathbf{f}_{2c} = \begin{bmatrix} X_A - X_B \\ Y_A - Y_B \\ Z_A - Z_B \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\mathbf{f}_{3a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_3 g \end{bmatrix}, \mathbf{f}_{3c} = \begin{bmatrix} X_B \\ Y_B \\ Z_B \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\mathbf{M}_{1a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_1 \end{bmatrix}; \mathbf{M}_{1c} = \begin{bmatrix} \text{Y}_0\text{b}/3+\text{Y}_\text{A}\,2\text{b}/3\text{-}\text{Z}_\text{O}\text{a.sinq}_1 \\ -X_0 b/3 - X_A 2b/3 + Z_O a.\text{cosq}_1 \\ X_0\text{a.sinq}_1 - Y_O a.\text{cosq}_1 \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\mathbf{M}_{2a} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_2 \\ 0 \end{bmatrix}; \mathbf{M}_{2c} = \begin{bmatrix} \tau_2 \text{sinq}_1 + (\text{Y}_\text{A}+\text{Y}_\text{B})(\text{l}_1\text{sinq}_2)/2\text{-}(\text{Z}_\text{A}+\text{Z}_\text{B})(\text{l}_1\text{sinq}_1\text{cosq}_2)/2 \\ -\tau_2\text{cosq}_1\text{-}(\text{X}_A+\text{X}_B)(\text{l}_1\text{sinq}_2)/2+(Z_A+Z_B)(\text{l}_1\text{cosq}_1\text{cosq}_2) \\ (\text{X}_A+\text{X}_B)(\text{l}_1\text{sinq}_1\text{cosq}_2)/2\text{-}(Y_A+\text{Y}_B)(\text{l}_1\text{cosq}_1\text{cosq}_2)/2 \end{bmatrix} \quad (26)$$

DO NOT COPY

$$\mathbf{M}_{3a}=\begin{bmatrix}0\\ \tau_3\\ 0\end{bmatrix};\mathbf{M}_{3c}=\begin{bmatrix}\tau_3\text{sin}q_1+Y_B(l_2\text{sin}(q_2+q_3))/2-Z_B(\text{sin}q_1 l_2\text{cos}(q_2+q_3))/2\\ -\tau_3\text{cos}q_1-X_B(l_2\text{sin}(q_2+q_3))/2+Z_B(l_2\text{cos}q_1\text{cos}(q_2+q_3))/2\\ X_B(\text{sin}q_1 l_2\text{cos}(q_2+q_3))/2-Y_B(l_2\text{cos}q_1\text{cos}(q_2+q_3))/2\end{bmatrix} \quad (27)$$

Phương trình vi phân Newton-Euler của robot có dạng:

$$\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q},t)\ddot{\mathbf{q}}+\bar{\mathbf{k}}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)=\bar{\mathbf{Q}}_a+\bar{\mathbf{Q}}_c \quad (28)$$

Trong đó:

$$\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q},t)=\begin{bmatrix}m_1\mathbf{J}_{T1}\\ m_2\mathbf{J}_{T2}\\ m_3\mathbf{J}_{T3}\\ \mathbf{I}_{C1}\mathbf{J}_{R1}\\ \mathbf{I}_{C2}\mathbf{J}_{R2}\\ \mathbf{I}_{C3}\mathbf{J}_{R3}\end{bmatrix},\ \bar{\mathbf{k}}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)=\begin{bmatrix}m_1\dot{\mathbf{J}}_{T1}\dot{\mathbf{q}}\\ m_2\dot{\mathbf{J}}_{T2}\dot{\mathbf{q}}\\ m_3\dot{\mathbf{J}}_{T3}\dot{\mathbf{q}}\\ \mathbf{I}_{C1}\dot{\mathbf{J}}_{R1}\dot{\mathbf{q}}+\tilde{\boldsymbol{\omega}}_1\mathbf{I}_{C1}\boldsymbol{\omega}_1\\ \mathbf{I}_{C2}\dot{\mathbf{J}}_{R2}\dot{\mathbf{q}}+\tilde{\boldsymbol{\omega}}_2\mathbf{I}_{C2}\boldsymbol{\omega}_2\\ \mathbf{I}_{C3}\dot{\mathbf{J}}_{R3}\dot{\mathbf{q}}+\tilde{\boldsymbol{\omega}}_3\mathbf{I}_{C3}\boldsymbol{\omega}_3\end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\bar{\mathbf{Q}}_a=\begin{bmatrix}\mathbf{f}_{1a}\\ \mathbf{f}_{2a}\\ \mathbf{f}_{3a}\\ \mathbf{M}_{1a}\\ \mathbf{M}_{2a}\\ \mathbf{M}_{3a}\end{bmatrix};\ \bar{\mathbf{Q}}_c=\begin{bmatrix}\mathbf{f}_{1c}\\ \mathbf{f}_{2c}\\ \mathbf{f}_{3c}\\ \mathbf{M}_{1c}\\ \mathbf{M}_{2c}\\ \mathbf{M}_{3c}\end{bmatrix} \quad (30)$$

Thế các biểu thức tính được. Ta được ma trận khối lượng $\bar{M}$ có dạng:

$$\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q},t)=\begin{bmatrix}M_{11} & M_{12} & M_{13}\\ M_{21} & M_{22} & M_{23}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ M_{181} & M_{182} & M_{183}\end{bmatrix} \quad (31)$$

Với:

$M_{11}=\text{-am}_1\text{s}_1, M_{12}=0, M_{13}=0; M_{21}=\text{am}_1 c_1, M_{22}=0, M_{23}=0$

$M_{31}=0, \text{M}_{32}=0, \text{M}_{33}=0$

$M_{41}=\text{-m}_2\text{s}_1(2\text{a}+\text{l}_1\text{c}_2)/2, M_{42}=\text{-l}_1\text{m}_2\text{c}_1\text{s}_2/2, M_{43}=0$

$M_{51} = m_2c_1(2a + l_1c_2)/2,\ M_{52} = -l_1m_2s_1s_2/2,\ M_{53} = 0$

$M_{61} = 0,\ M_{62} = l_1m_2c_2/2,\ M_{63} = 0;$

$M_{71} = -m_3s_1(2a + l_2c_{23} + 2l_1c_2)/2,\ M_{72} = -m_3c_1(l_2s_{23} + 2l_1s_2)/2,\ M_{73} = -l_2m_3s_{23}c_1/2,$

$M_{81} = m_3c_1(2a + l_2c_{23} + 2l_1c_2)/2,$

$M_{82} = -m_3s_1(l_2s_{23} + 2l_1s_2)/2,\ M_{83} = -l_2m_3s_{23}s_1/2,$

$M_{91} = 0, M_{92} = m_3(l_2c_{23}/2 + l_1c_2),\ M_{93} = l_2m_3c_{23}/2$

$M_{101} = 0, M_{102} = 0,\ M_{103} = 0, M_{111} = 0, M_{112} = 0,\ M_{113} = 0$

$M_{121} = I_{zz1}, M_{122} = 0,\ M_{123} = 0, M_{131} = 0, M_{132} = I_{xx2}s_1, M_{133} = 0$

$M_{141} = 0, M_{142} = -I_{yy2}c_1, M_{143} = 0, M_{151} = I_{zz2}, M_{152} = 0, M_{153} = 0$

$M_{161} = 0, M_{162} = I_{xx3}s_1, M_{163} = I_{xx3}s_1, M_{171} = 0, M_{172} = -I_{yy3}c_1, M_{173} = -I_{yy3}c_1$

$M_{181} = I_{zz3}, M_{182} = 0,\ M_{183} = 0$

Vectơ $\bar{\mathbf{k}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$:

$$\bar{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{21} & \dots & k_{181} \end{bmatrix}^T \qquad (32)$$

Ở đây:

$k_{11} = -a\dot{q}_1^2 m_1 c_1,\ k_{21} = -a\dot{q}_1^2 m_1 s_1, k_{31} = 0$

$k_{41} = -\dot{q}_2 m_2(\dot{q}_2 l_1 c_1 c_2/2 - \dot{q}_1 l_1 s_1 si_2/2) - \dot{q}_1 m_2(\dot{q}_1 c_1(2a + l_1 c_2))/2$
$- \dot{q}_2 l_1 s_1 s_2/2)$

$k_{51} = -\dot{q}_2 m_2(\dot{q}_1 l_1 c_1 s_2/2 + \dot{q}_2 l_1 c_2 s_1/2) - \dot{q}_1 m_2(\dot{q}_1 s_1(2a + l_1 c_2)/2$
$+ \dot{q}_2 l_1 c_1 s_2/2)$

$k_{61} = -\dot{q}_2^2 l_1 m_2 s_2/2$

$k_{71} = \dot{q}_1 m_3(\dot{q}_2 s_1(l_2 s_{23} + 2l_1 s_2)/2 - \dot{q}_1 c_1(2a + l_2 c_{23} + 2l_1 c_2)/2 + \dot{q}_3 l_2 s_{23} s_1/2)$
$- \dot{q}_2 m_3(\dot{q}_2 c_1(l_2 c_{23} + 2l_1 c_2)/2 - \dot{q}_1 s_1(l_2 s_{23} + 2l_1 s_2)/2 + \dot{q}_3 l_2 c_{23} c_1/2)$
$- \dot{q}_3 m_3(\dot{q}_2 l_2 c_{23} c_1/2 + \dot{q}_3 l_2 c_{23} c_1/2 - \dot{q}_1 l_2 s_{23} s_1/2)$

$k_{81} = -\dot{q}_1 m_3(\dot{q}_2 c_1(l_2 s_{23} + 2l_1 s_2)/2 + \dot{q}_1 s_1(2a + l_2 c_{23} + 2l_1 c_2)/2 + \dot{q}_3 l_2 s_{23} c_1/2)$
$- \dot{q}_2 m_3(\dot{q}_2 s_1(l_2 c_{23} + 2l_1 c_2)/2 + \dot{q}_1 c_1(l_2 s_{23} + 2l_1 s_2)/2 + \dot{q}_3 l_2 c_{23} s_1/2)$
$- \dot{q}_3 m_3(\dot{q}_1 l_2 s_{23} c_1/2 + \dot{q}_2 l_2 c_{23} s_1/2 + \dot{q}_3 l_2 c_{23} s_1/2)$

$k_{91} = -\dot{q}_2 m_3(\dot{q}_2(l_2 s_{23}/2 + l_1 s_2) + \dot{q}_3 l_2 s_{23}/2) - \dot{q}_3 l_2 m_3 s_{23}(\dot{q}_2 + \dot{q}_3)/2$

DO NOT COPY

$k_{101} = 0, k_{111} = 0, k_{121} = 0$

$k_{131}=I_{xx2}\dot{q}_1\dot{q}_2c_1 + I_{yy2}\dot{q}_1\dot{q}_2c_1 - I_{zz2}\dot{q}_1\dot{q}_2c_1$

$k_{141}=I_{xx2}\dot{q}_1\dot{q}_2s_1 + I_{yy2}\dot{q}_1\dot{q}_2s_1 - I_{zz2}\dot{q}_1\dot{q}_2s_1$

$k_{151} = I_{xx2}\dot{q}_2^{\,2}c_1s_1 - I_{yy2}\dot{q}_2^{\,2}c_1s_1$

$k_{161}=I_{yy3}\dot{q}_1c_1(\dot{q}_2 + \dot{q}_3) - I_{zz3}\dot{q}_1c_1(\dot{q}_2 + \dot{q}_3) + I_{xx3}\dot{q}_1\dot{q}_2c_1 + I_{xx3}\dot{q}_1\dot{q}_3c_1$

$k_{171}=I_{xx3}\dot{q}_1s_1(\dot{q}_2 + \dot{q}_3) - I_{zz3}\dot{q}_1s_1(\dot{q}_2 + \dot{q}_3) + I_{yy3}\dot{q}_1\dot{q}_2s_1 + I_{yy3}\dot{q}_1\dot{q}_3s_1$

$k_{181} = I_{xx3}c_1s_1(\dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2 - I_{yy3}c_1s_1(\dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2$

Vectơ lực suy rộng $\bar{\mathbf{Q}}_a$ và $\bar{\mathbf{Q}}_c$:

$$\bar{\mathbf{Q}}_a = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_1g \\ 0 \\ 0 \\ -m_2g \\ 0 \\ 0 \\ -m_3g \\ 0 \\ 0 \\ \tau_1 \\ \tau_2 sinq_1 \\ -\tau_2 cosq_1 \\ 0 \\ \tau_3 sinq_1 \\ -\tau_3 cosq_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{Q}}_c = \begin{bmatrix} X_O - X_A \\ Y_O - Y_A \\ Z_O - Z_A \\ X_A - X_B \\ Y_A - Y_B \\ Z_A - Z_B \\ X_B \\ Y_B \\ Z_B \\ Y_0 b/3 + Y_A 2b/3 - Z_O a.sinq_1 \\ -X_0 b/3 - X_A 2b/3 + Z_O a.cosq_1 \\ X_0 a.sinq_1 - Y_O a.cosq_1 \\ (Y_A + Y_B)(l_1 sinq_2)/2 - (Z_A + Z_B)(l_1 sinq_1 cosq_2)/2 \\ -(X_A + X_B)(l_1 sinq_2)/2 + (Z_A + Z_B)(l_1 cosq_1 cosq_2) \\ (X_A + X_B)(l_1 sinq_1 cosq_2)/2 - (Y_A + Y_B)(l_1 cosq_1 cosq_2)/2 \\ Y_B(l_2 sin(q_2 + q_3))/2 - Z_B(sinq_1 l_2 cos(q_2 + q_3))/2 \\ -X_B(l_2 sin(q_2 + q_3))/2 + Z_B(l_2 cosq_1 cos(q_2 + q_3))/2 \\ X_B(sinq_1 l_2 cos(q_2 + q_3))/2 - Y_B(l_2 cosq_1 cos(q_2 + q_3))/2 \end{bmatrix} \quad (33)$$

Ta tiến hành khử các phản lực liên kết lý tưởng để đưa phương trình vi phân về dạng tối giản bằng cách nhân với ma trận Jacobi tổng hợp:

$$\overline{\mathbf{J}}^T(\mathbf{q},t)=\left[\mathbf{J}_{T1}^T,\mathbf{J}_{T2}^T,\mathbf{J}_{T3}^T,\mathbf{J}_{R1}^T,\mathbf{J}_{R2}^T,\mathbf{J}_{R3}^T\right]=\begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & \dots & J_{118} \\ J_{21} & J_{22} & \dots & J_{218} \\ J_{31} & J_{32} & \dots & J_{318} \end{bmatrix} \qquad (34)$$

Ở đây:

$J_{11}=-as_1; J_{12}=ac_1; J_{13}=0; J_{14}=\text{-s}_1(2\text{a}+\text{l}_1\text{c}_2)/2; J_{15}=\text{c}_1(2\text{a}+\text{l}_1\text{c}_2)/2;$

$J_{16}=0;\ J_{17}=\text{-s}_1(2\text{a}+\text{l}_2\text{c}_{23}+2\text{l}_1\text{c}_2)/2;\ J_{18}=\text{c}_1(2\text{a}+\text{l}_2\text{c}_{23}+2\text{l}_1\text{c}_2)/2;$

$J_{19}=0; J_{110}=0; J_{111}=0; J_{112}=1; J_{113}=0; J_{114}=0; J_{115}=1; J_{116}=0;$

$J_{117}=0; J_{118}=1; J_{21}=0; J_{22}=0; J_{23}=0; J_{24}=\text{-l}_1\text{c}_1\text{s}_2/2; J_{26}=\text{l}_1\text{c}_2/2$

$J_{27}=\text{-c}_1(\text{l}_2\text{s}_{23}+2\text{l}_1\text{s}_2)/2; J_{28}=\text{-s}_1(\text{l}_2\text{s}_{23}+2\text{l}_1\text{s}_2)/2;$

$J_{29}=\text{l}_2\text{c}_{23}/2+\text{l}_1\text{c}_2; J_{210}=0;$

$J_{211}=0; J_{212}=0; J_{213}=\text{s}_1; J_{214}=\text{-c}_1; J_{215}=0; J_{216}=\sin(\text{q1});$

$J_{217}=-c_1; J_{218}=0; J_{31}=0; J_{22}=0; J_{33}=0; J_{34}=0; J_{35}=0; J_{36}=0$

$J_{37}=\text{-l}_2\text{s}_{23}\text{c}_1/2; J_{38}=\text{-l}_2\text{s}_{23}\text{s}_1/2; J_{39}=\text{l}_2\text{c}_{23}/2; J_{310}=0; J_{311}=0; J_{312}=0$

$J_{313}=0; J_{314}=0; J_{315}=0; J_{316}=\sin(\text{q1}); J_{317}=-c_1; J_{318}=0$

Ta thu được kết quả là hệ phương trình vi phân chuyển động dạng tối giản của robot:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{22} & m_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} \qquad (35)$$

Từ (35) có các phương trình vi phân chuyển động của robot:

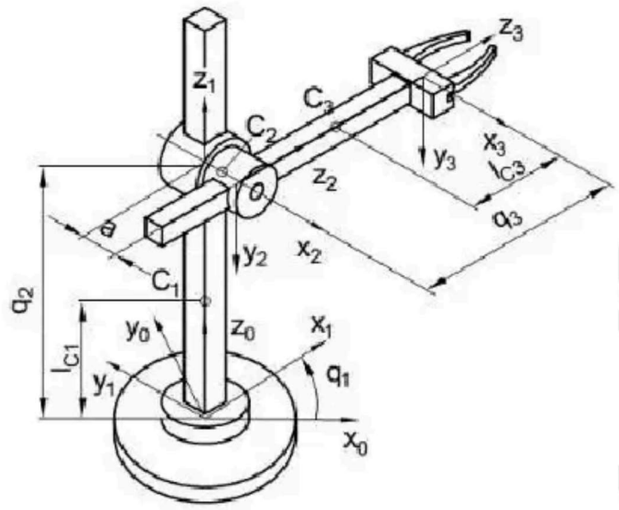
DO NOT COPY

$$\tau_1 = I_{zz1}\ddot{q}_1 + I_{zz2}\ddot{q}_1 + I_{zz3}\ddot{q}_1 + I_{xx2}\dot{q}_2^{\,2}2s_1c_1/2 + I_{xx3}\dot{q}_2^{\,2}s_1c_1/2 + I_{xx3}\dot{q}_3^{\,2}2s_1c_1/2$$
$$- I_{yy2}\dot{q}_2^{\,2}2s_1c_1/2 - I_{yy3}\dot{q}_2^{\,2}2s_1c_1/2 - I_{yy3}\dot{q}_3^{\,2}2s_1c_1/2 + a^2\ddot{q}_1m_1 + a^2\ddot{q}_1m_2$$
$$+ a^2\ddot{q}_1m_3 + \ddot{q}_1l_1^{\,2}m_2/8 + \ddot{q}_1l_1^{\,2}m_3/2 + \ddot{q}_1l_2^{\,2}m_3/8 + \ddot{q}_1l_1^{\,2}m_2\cos(2q_2)/8$$
$$+ \ddot{q}_1l_1^{\,2}m_3\cos(2q_2)/2 + \ddot{q}_1l_2^{\,2}m_3\cos(2q_2+2q_3)/8 + I_{xx3}\dot{q}_2\dot{q}_3 2s_1c_1$$
$$- I_{yy3}\dot{q}_2\dot{q}_3 2s_1c_1 + \ddot{q}_1l_1l_2m_3\cos(2q_2+q_3)/2 + a\ddot{q}_1l_2m_3c_{23}$$
$$- \dot{q}_1\dot{q}_2l_1^{\,2}m_2 2s_2c_2/4 - \dot{q}_1\dot{q}_2l_1^{\,2}m_3 2s_2c_2 + a\ddot{q}_1l_1m_2c_2 + 2a\ddot{q}_1l_1m_3c_2$$
$$- \dot{q}_1\dot{q}_2l_2^{\,2}m_3 2s_{23}c_{23}/4 - \dot{q}_1\dot{q}_3l_2^{\,2}m_3 2s_{23}c_{23}/4 + \ddot{q}_1l_1l_2m_3c_3/2$$
$$- a\dot{q}_1\dot{q}_2l_2m_3s_{23} - a\dot{q}_1\dot{q}_3l_2m_3s_{23} - a\dot{q}_1\dot{q}_2l_1m_2s_2 - 2a\dot{q}_1\dot{q}_2l_1m_3s_2$$
$$- \dot{q}_1\dot{q}_3l_1l_2m_3s_3/2 - \dot{q}_1\dot{q}_2l_1l_2m_3\sin(2q_2+q_3) - \dot{q}_1\dot{q}_3l_1l_2m_3\sin(2q_2+q_3)/2$$

$$\tau_2 = I_{xx2}\ddot{q}2/2 + I_{yy2}\ddot{q}2/2 - I_{xx2}\ddot{q}_2\cos(2q_1)/2 + I_{yy2}\ddot{q}2\cos(2q_1)/2$$
$$+ \ddot{q}_2l_1^{\,2}m_2/4 + \ddot{q}_2l_1^{\,2}m_3 + gl_1m_2c_2/2 + gl_1m_3c_2 + \dot{q}_1^{\,2}l_1^{\,2}m_2 2s_2c_2/8$$
$$+ \dot{q}_1^{\,2}l_1^{\,2}m_3 2s_2c_2/2 + a\dot{q}_1^{\,2}l_1m_2s_2/2 + a\dot{q}_1^{\,2}l_1m_3s_2 - \dot{q}_1^{\,2}l_1l_2m_3s_3/4$$
$$- \dot{q}_2^{\,2}l_1l_2m_3s_3/2 - \dot{q}_3^{\,2}l_1l_2m_3s_3/2 + \dot{q}_1^{\,2}l_1l_2m_3\sin(2q_2+q_3)/4$$
$$+ \ddot{q}_2l_1l_2m_3c_3/2 + \ddot{q}_3l_1l_2m_3c_3/2 - \dot{q}_2\dot{q}_3l_1l_2m_3s_3$$

$$\tau_3 = I_{xx3}\ddot{q}_2/2 + I_{xx3}\ddot{q}3/2 + I_{yy3}\ddot{q}_2/2 + I_{yy3}\ddot{q}_3/2 - I_{xx3}\ddot{q}_2\cos(2q_1)/2$$
$$- I_{xx3}\ddot{q}_3\cos(2q_1)/2 + I_{yy3}\ddot{q}_2\cos(2q_1)/2 + I_{yy3}\ddot{q}_3\cos(2q_1)/2$$
$$+ \ddot{q}_2l_2^{\,2}m_3/4 + \ddot{q}_3l_2^{\,2}m_3/4 + gl_2m_3c_{23}/2 + \dot{q}_1^{\,2}l_2^{\,2}m_3 2s_{23}c_{23}/8$$
$$+ a\dot{q}_1^{\,2}l_2m_3s_{23}/2 + \dot{q}_1^{\,2}l_1l_2m_3s_3/4 + \dot{q}_2^{\,2}l_1l_2m_3s_3/2$$
$$+ \dot{q}_1^{\,2}l_1l_2m_3\sin(2q_2+q_3)/4 + \ddot{q}_2l_1l_2m_3c_3/2$$

Ví dụ 5.2: Cho robot có 3 bậc tự do, có 3 khâu, cấu hình RTT, kích thước như hình 5.3. Ký hiệu khối tâm của khâu thứ i là C_i. Khối lượng các khâu là m_i (i = 1,…,3), mômen quán tính đối với trục đi qua khối tâm I_i (i = 1,…,3). Hãy thiết lập phương trình vi phân chuyển động của robot bằng phương pháp Newton-Euler.



Hình 5.3. Robot ba bậc tự do RTT

Lời giải:

Bảng 5.3. Tham số động lực học của robot

Khâu	Tọa độ khối tâm địa phương			Khối lượng	Ma trận momen quán tính I(kg.mm^2)					
	x_c	y_c	z_c		I_{xx}	I_{yy}	I_{zz}	I_{xy}	I_{yz}	I_{zx}
1	0	0	l_{C1}	m_1	I_{xx1}	I_{yy1}	I_{zz1}	0	0	0
2	-a/2	0	0	m_2	I_{xx2}	I_{yy2}	I_{zz2}	0	0	0
3	0	0	$-l_{C3}$	m_3	I_{xx3}	I_{yy3}	I_{zz3}	0	0	0

Chọn các hệ tọa độ suy rộng:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix}^T \qquad (1)$$

Từ kết quả ví dụ 5.1 có được ma trận chuyển trong hệ tọa độ địa phương là $\mathbf{H}_{01}$, $\mathbf{H}_{12}$, $\mathbf{H}_{23}$ và ma trận chuyển trong hệ tọa độ toàn cục là $\mathbf{H}_{0i}$ *(i = 1,2,3).*

$$\mathbf{H}_{0i} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i & \mathbf{r}_i^{(0)} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, (i = 1,2,3) \qquad (2)$$

Tọa độ khối tâm của các khâu trong hệ quy chiếu gắn liền với khâu có dạng:

$$\mathbf{u}_{c1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_{C1} \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u}_{C2} = \begin{bmatrix} -l_{C2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u}_{c3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -l_{C3} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Tọa độ trọng tâm các khâu trong hệ quy chiếu cố định được tính theo công thức sau:

$$\mathbf{r}_{C_i} = \mathbf{H}_{0i}\mathbf{u}_{C_i}^{(i)} \tag{4}$$

Từ (5.57) ta suy ra:

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_{C1} \end{bmatrix}; \ \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} l_{C2}c_1 \\ l_{C2}s_1 \\ q_2 \end{bmatrix}; \ \mathbf{r}_3 = \begin{bmatrix} (l_{C3} - 2q_3)s_1 \\ -(l_{C3} - 2q_3)c_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Ma trận Jacobi tịnh tiến của các khâu có dạng:

$$\mathbf{J}_{T1} = \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{J}_{T2} = \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -l_{C2}s_1 & 0 & 0 \\ l_{C2}c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_{T3} = \frac{\partial \mathbf{r}_3}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} (l_{C3} - 2q_3)c_1 & 0 & -2s_1 \\ (l_{C3} - 2q_3)s_1 & 0 & 2c_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Toán tử sóng véctơ vân tốc góc của khâu

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i^{(0)} = \dot{\mathbf{A}}_i\mathbf{A}_i^T, \ (i = 1,2,3) \tag{7}$$

Từ (7) xác định vận tốc góc của các khâu so với hệ trục tọa độ cố định:

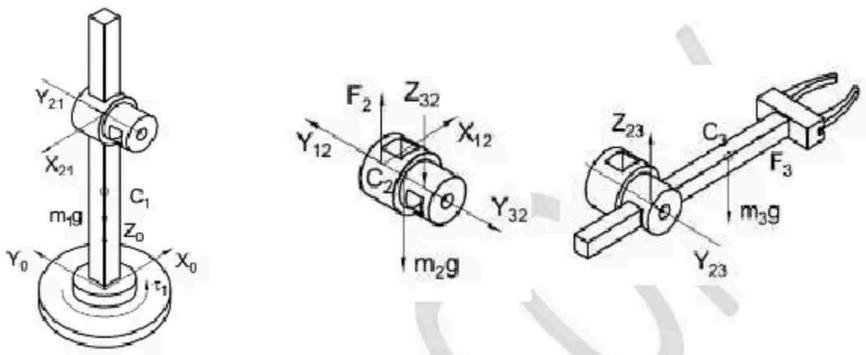
$$\boldsymbol{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{\omega}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Do chỉ có khớp đầu tiên là khớp quay, các khớp sau là khớp tịnh tiến, nên vận tốc góc của các khâu là như nhau.

Từ vận tốc góc các khâu, ta xác định các ma trận Jacobi quay:

$$\mathbf{J}_{R1}=\frac{\partial\boldsymbol{\omega}_1}{\partial\mathbf{q}}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix},\ \mathbf{J}_{R2}=\frac{\partial\boldsymbol{\omega}_2}{\partial\mathbf{q}}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix},\ \mathbf{J}_{R3}=\frac{\partial\boldsymbol{\omega}_3}{\partial\mathbf{q}}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix} \qquad (9)$$

Tách robot ba khâu của robot như sau:



Khâu 1 Khâu 2 Khâu 3

Hình 5.4. Tách các khâu của robot

Các véctơ chính và mômen chính đối với khối tâm của các lực có dạng:

$$\mathbf{f}_1=\mathbf{f}_1^{a}+\mathbf{f}_1^{c}=\begin{bmatrix}0\\0\\-m_1g\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}X_0-X_{21}\\Y_0-Y_{21}\\Z_0\end{bmatrix};$$

$$\mathbf{f}_2=\mathbf{f}_2^{a}+\mathbf{f}_2^{c}=\begin{bmatrix}0\\0\\-m_2g+F_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}X_{12}\\Y_{12}-Y_{32}\\-Z_{32}\end{bmatrix}; \qquad (10)$$

$$\mathbf{f}_3=\mathbf{f}_3^{a}+\mathbf{f}_3^{c}=\begin{bmatrix}F_3\cos q_1\\F_3\sin q_1\\-m_3g\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\Y_{23}\\Z_{23}\end{bmatrix}$$

DO NOT COPY

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_1^a + \mathbf{M}_1^c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_0 l_{C1} + Y_{21}(q_2 - l_{C1}) \\ X_0 l_{C1} + X_{21}(q_2 - l_{C1}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_2 = \mathbf{M}_2^a + \mathbf{M}_2^c = \begin{bmatrix} \mathrm{F}_2(\mathrm{a}/2)\mathrm{cosq}_1 \\ \mathrm{F}_2(\mathrm{a}/2)\mathrm{sinq}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathrm{Z}_{32}(\mathrm{a}/2)\mathrm{cosq}_1 \\ \mathrm{Z}_{32}(\mathrm{a}/2)\mathrm{sinq}_1 \\ -\mathrm{X}_{12}(\mathrm{a}/2)\mathrm{cosq}_1 - (\mathrm{Y}_{12}+\mathrm{Y}_{32})(\mathrm{a}/2)\mathrm{sinq}_1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\mathbf{M}_3 = \mathbf{M}_3^a + \mathbf{M}_3^c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathrm{Z}_{23}(\mathrm{q}_3 - \mathrm{l}_{C3})\mathrm{sinq}_1 \\ \mathrm{Z}_{23}(\mathrm{q}_3 - \mathrm{l}_{C3})\mathrm{cosq}_1 \\ -\mathrm{Y}_{23}(\mathrm{q}_3 - \mathrm{l}_{C3})\mathrm{cosq}_1 \end{bmatrix}$$

Phương trình vi phân Newton-Euler của Robot có dạng :

$$\overline{\mathbf{M}}(\mathbf{q},t)\ddot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{k}}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t) = \overline{\mathbf{Q}} \quad (12)$$

Trong đó:

$$\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q},t) = \begin{bmatrix} m_1\mathbf{J}_{T1} \\ m_2\mathbf{J}_{T2} \\ m_3\mathbf{J}_{T3} \\ \mathbf{I}_{C1}\mathbf{J}_{R1} \\ \mathbf{I}_{C2}\mathbf{J}_{R2} \\ \mathbf{I}_{C3}\mathbf{J}_{R3} \end{bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{k}}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t) = \begin{bmatrix} m_1\dot{\mathbf{J}}_{T1}\dot{\mathbf{q}} \\ m_2\dot{\mathbf{J}}_{T2}\dot{\mathbf{q}} \\ m_3\dot{\mathbf{J}}_{T3}\dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{I}_{C1}\dot{\mathbf{J}}_{R1}\dot{\mathbf{q}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_1\mathbf{I}_{C1}\boldsymbol{\omega}_1 \\ \mathbf{I}_{C2}\dot{\mathbf{J}}_{R2}\dot{\mathbf{q}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_2\mathbf{I}_{C2}\boldsymbol{\omega}_2 \\ \mathbf{I}_{C3}\dot{\mathbf{J}}_{R3}\dot{\mathbf{q}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_3\mathbf{I}_{C3}\boldsymbol{\omega}_3 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\overline{\mathbf{Q}} = \overline{\mathbf{Q}}_a + \overline{\mathbf{Q}}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{1a} \\ \mathbf{f}_{2a} \\ \mathbf{f}_{3a} \\ \mathbf{M}_{1a} \\ \mathbf{M}_{2a} \\ \mathbf{M}_{3a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{1c} \\ \mathbf{f}_{2c} \\ \mathbf{f}_{3c} \\ \mathbf{M}_{1c} \\ \mathbf{M}_{2c} \\ \mathbf{M}_{3c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{1a} + \mathbf{f}_{1c} \\ \mathbf{f}_{2a} + \mathbf{f}_{2c} \\ \mathbf{f}_{3a} + \mathbf{f}_{3c} \\ \mathbf{M}_{1a} + \mathbf{M}_{1c} \\ \mathbf{M}_{2a} + \mathbf{M}_{2c} \\ \mathbf{M}_{3a} + \mathbf{M}_{3c} \end{bmatrix} \quad (14)$$

Thế các biểu thức tính được ta được:

Ma trận khối lượng:

$$\overline{\mathbf{M}}(\mathbf{q},\mathrm{t})=\begin{bmatrix} \mathrm{m}_1\mathbf{J}_{\mathrm{T1}} \\ \mathrm{m}_2\mathbf{J}_{\mathrm{T2}} \\ \mathrm{m}_3\mathbf{J}_{\mathrm{T3}} \\ \mathbf{I}_1\mathbf{J}_{\mathrm{R1}} \\ \mathbf{I}_2\mathbf{J}_{\mathrm{R2}} \\ \mathbf{I}_3\mathbf{J}_{\mathrm{R3}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ M_{181} & M_{182} & M_{183} \end{bmatrix} \qquad (15)$$

Với:

$M_{11}=0, \mathrm{M}_{12}=0, \mathrm{M}_{13}=0, \mathrm{M}_{21}=0, \mathrm{M}_{22}=0, \mathrm{M}_{23}=0,$

$M_{31}=0, \mathrm{M}_{32}=0, \mathrm{M}_{33}=0, M_{41}=\text{-}\mathrm{l}_{C2}\mathrm{m}_2\mathrm{s}_1, \mathrm{M}_{42}=0, \mathrm{M}_{43}=0,$

$M_{51}=\text{-}\mathrm{l}_{C2}\mathrm{m}_2 c_1, M_{52}=0; \mathrm{M}_{53}=0, M_{61}=0, \mathrm{M}_{62}=\mathrm{m}_2, M_{63}=0,$

$M_{71}=\text{-}\mathrm{m}_3 c_1(\mathrm{l}_{C3}-2q_3), \mathrm{M}_{72}=0, \mathrm{M}_{73}=\text{-}2\mathrm{m}_3\mathrm{s}_1,$

$M_{81}=\text{-}\mathrm{m}_3 s_1(\mathrm{l}_{C3}-2q_3), M_{82}=0; M_{83}=\text{-}2\mathrm{m}_3 c_1;$

$M_{91}=0, \mathrm{M}_{92}=\mathrm{m}_3, \mathrm{M}_{93}=0,$

$M_{101}=0, \mathrm{M}_{102}=0, \mathrm{M}_{103}=0, \mathrm{M}_{111}=0, M_{112}=0, \mathrm{M}_{113}=0$

$M_{121}=\mathrm{I}_{z1}, M_{122}=0, M_{123}=0, M_{131}=0, M_{132}=0, M_{133}=0$

$M_{141}=0, M_{142}=0, M_{143}=0, M_{151}=\mathrm{I}_{z2}, M_{152}=0, M_{153}=0,$

$M_{161}=0, M_{162}=0, M_{163}=0, M_{171}=0, M_{172}=0, M_{173}=0,$

$M_{181}=\mathrm{I}_{z3}, M_{182}=0, M_{183}=0$

Véc tơ $\overline{\mathbf{k}}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)$:

$$\overline{\mathbf{k}}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},\mathrm{t})=\begin{bmatrix} \mathrm{m}_1\dot{\mathbf{J}}_{\mathrm{T1}}\dot{\mathbf{q}} \\ \mathrm{m}_2\dot{\mathbf{J}}_{\mathrm{T2}}\dot{\mathbf{q}} \\ \mathrm{m}_3\dot{\mathbf{J}}_{\mathrm{T3}}\dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{I}_1\dot{\mathbf{J}}_{\mathrm{R1}}\dot{\mathbf{q}}+\tilde{\omega}_1\mathrm{I}_1\omega_1 \\ \mathrm{I}_2\dot{\mathrm{J}}_{\mathrm{R2}}\dot{\mathrm{q}}+\tilde{\omega}_2\mathrm{I}_2\omega_2 \\ \mathrm{I}_3\dot{\mathrm{J}}_{\mathrm{R3}}\dot{\mathrm{q}}+\tilde{\omega}_3\mathrm{I}_3\omega_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{21} \\ \vdots \\ k_{181} \end{bmatrix} \qquad (16)$$

Ở đây:

$k_{11}=0;\ k_{21}=0, \mathrm{k}_{31}=0,\ \mathrm{k}_{41}=\text{-}\mathrm{l}_{C2}m_2c_1\dot{q}_1^2, \mathrm{k}_{51}=\text{-}\mathrm{l}_{C2}m_2s_1\dot{q}_1^2, \mathrm{k}_{61}=0$

DO NOT COPY

k_{71}=- $\dot{q}_1 m_3(4\dot{q}_3 c_1 + l_{C3} s_1 \dot{q}_1 - 2\dot{q}_1 q_3 s_1)$,

k_{81}=- $\dot{q}_1 m_3(4\dot{q}_3 s_1 - l_{C3} c_1 \dot{q}_1 + 2\dot{q}_1 q_3 c_1)$, k_{91}=0,

$k_{101} = 0$, $k_{111} = 0$, $k_{121} = 0$, $k_{131} = 0$, $k_{141} = 0$,

$k_{151} = 0$, $k_{161} = 0$, $k_{171} = 0$, $k_{181} = 0$

Véc tơ lực suy rộng:

$$\bar{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} Q_{11} \\ Q_{21} \\ \vdots \\ Q_{181} \end{bmatrix} \tag{17}$$

Với:

$Q_{11} = 0, Q_{21} = 0, Q_{31} = -m_1 g, Q_{41} = 0, Q_{51} = 0, Q_{61} = F_2 - m_2 g,$

$Q_{71} = -F_3 s_1, Q_{81} = F_3 c_1, Q_{91} = -m_3 g, Q_{101} = 0, Q_{111} = 0, Q_{121} = \tau_1,$

$Q_{131} = 0, Q_{141} = 0, Q_{151} = 0, Q_{161} = 0, Q_{161} = 0, Q_{181} = 0$

Nhân cả hai vế phương trình với ma trận chuyển vị của ma trận Jacobi tổng hợp:

$$\bar{\mathbf{J}}^T(\mathbf{q},t) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{T1}^T & \mathbf{J}_{T2}^T & \mathbf{J}_{T3}^T & \mathbf{J}_{R1}^T & \mathbf{J}_{R2}^T & \mathbf{J}_{R3}^T \end{bmatrix} \tag{18}$$

Kết quả thu được phương trình vi phân chuyển động tối giảm của mô hình robot:

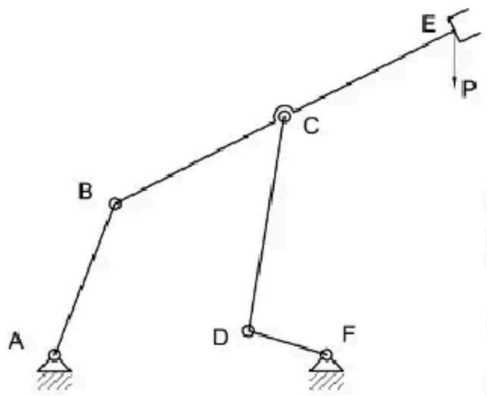
$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} \tag{19}$$

Tính toán bằng Matlab ta được kết quả như sau:

$$\begin{cases} \tau_1 = \ddot{q}_1(m_2 l_{C2}^2 + m_3 l_{C3}^2 - 4m_3 l_{C3} q_3 + 4m_3 q_3^2 + I_{z1} + I_{z2} + I_{z3}) - 4m_3(l_{C3} - 2q_3)\dot{q}_1 \dot{q}_3 \\ F_2 = (m_2 + m_3)(g + q_2) \\ F_3 = 4m_3 \ddot{q}_3 + \dot{q}_1^2(2m_3 l_{C3} - 4m_3 q_3) \end{cases} \tag{20}$$

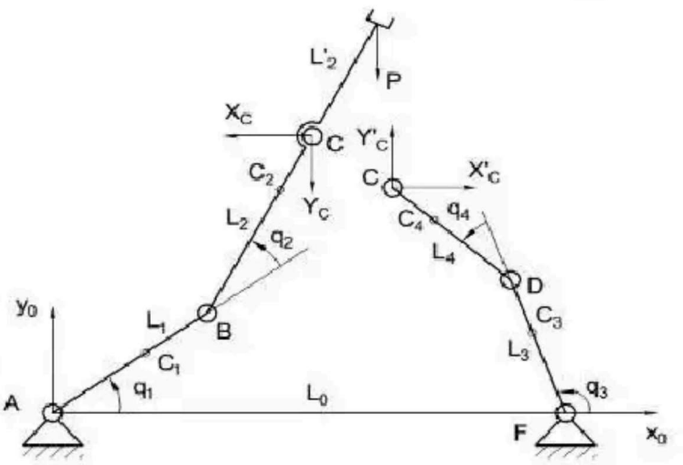
Ví dụ 5.3: Cho robot phẳng có hai bậc tự do, gồm các khớp quay, cấu trúc như hình 5.5. Biết AB = L_1, BC = L_2, CE = L'_2, AF = L_0, FD = L_3 và

DC = L_4. Khối lượng các khâu là m_i (i = 1,..,4). Hãy thiết lập phương trình vi phân chuyển động của robot bằng phương pháp Newton-Euler.



Hình 5. 5. Robot phẳng hai bậc tự do

Lời giải:



Hình 5.6. Cấu trúc động học của robot

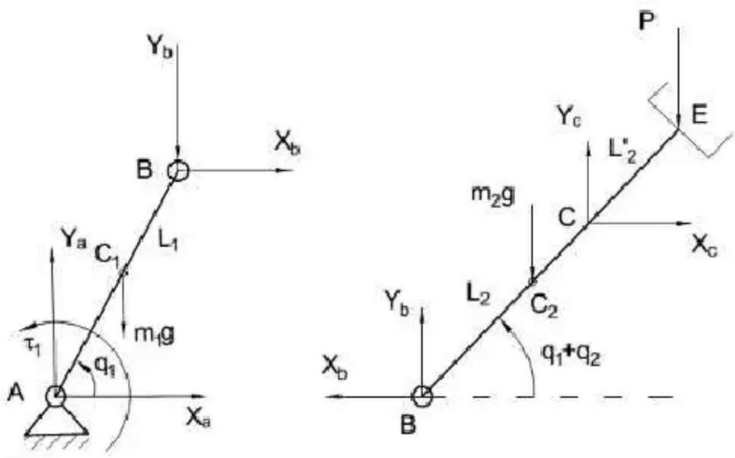
Ở đây $a_1 = AC_1$, $a_2 = BC_2$, $a_3 = FC_3$, $a_4 = DC_4$ với C_1, C_2 , C_3, C_4 lần lượt là vị trí khối tâm các khâu AB, BE, FD và DC.

*Nhánh bên trái:

Chọn tọa độ suy rộng đủ

$$\mathbf{q}^{(1)} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix}^T \qquad (1)$$

Tách hai khâu của nhánh bên trái như sau:



Hình 5.7. Các cấu trúc con của nhánh bên trái robot

Ta có:

$$\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} X_a + X_b \\ Y_a - Y_b - m_1 g \\ 0 \end{bmatrix};\ \mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} X_c - X_b \\ Y_c + Y_b - m_2 g - P \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_1 + a_1 s_1 X_a - a_1 c_1 Y_a - X_b s_1 (\mathrm{L}_1 - \mathrm{a}_1) - Y_b c_1 (\mathrm{L}_1 - a_1) \end{bmatrix} \qquad (3)$$

$$\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -P(\mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_2' - \mathrm{a}_2)\mathrm{c}_{12} - a_2 s_{12} X_b - a_2 c_{12} Y_b - X_c s_{12} (\mathrm{L}_2 - \mathrm{a}_2) + Y_c c_{12} (\mathrm{L}_2 - a_2) \end{bmatrix} \qquad (4)$$

Phương trình vi phân Newton-Euler của nhánh bên trái có dạng:

$$\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q}, \mathrm{t})\ddot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{k}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathrm{t}) = \bar{\mathbf{Q}} \qquad (5)$$

Với:

$$\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q},\mathrm{t})=\begin{bmatrix} m_1\mathbf{J}_{T1} \\ m_2\mathbf{J}_{T2} \\ \mathbf{I}_1\mathbf{J}_{R1} \\ \mathbf{I}_2\mathbf{J}_{R2} \end{bmatrix};\ \bar{\mathbf{k}}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},\mathrm{t})=\begin{bmatrix} m_1\dot{\mathbf{J}}_{T1}\dot{\mathbf{q}} \\ m_2\mathbf{J}_{T2}\dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{I}_1\mathbf{J}_{R1}\dot{\mathbf{q}}+\tilde{\boldsymbol{\omega}}_1\mathbf{I}_1\boldsymbol{\omega}_1 \\ \mathbf{I}_2\mathbf{J}_{R2}\dot{\mathbf{q}}+\tilde{\boldsymbol{\omega}}_2\mathbf{I}_2\boldsymbol{\omega}_2 \end{bmatrix};\ \bar{\mathbf{Q}}=\begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{M}_1 \\ \mathbf{M}_2 \end{bmatrix} \qquad (6)$$

Ta tiến hành khử các phản lực liên kết lý tưởng X_a , Y_a , X_b , Y_b về dạng tối giản bằng cách nhân vào bên trái cả vế phải và vế trái phương trình (6) với ma trận chuyển vị của ma trận Jacobian tổng hợp:

$$\bar{\mathbf{J}}^T(\mathbf{q},\mathrm{t})=\begin{bmatrix} \mathbf{J}_{T1}^T & \mathbf{J}_{T2}^T & \mathbf{J}_{R1}^T & \mathbf{J}_{R2}^T \end{bmatrix} \qquad (7)$$

Thế các biểu thức tìm được vào phương trình (5.67), ta rút ra được ra được X_c , Y_c như sau:

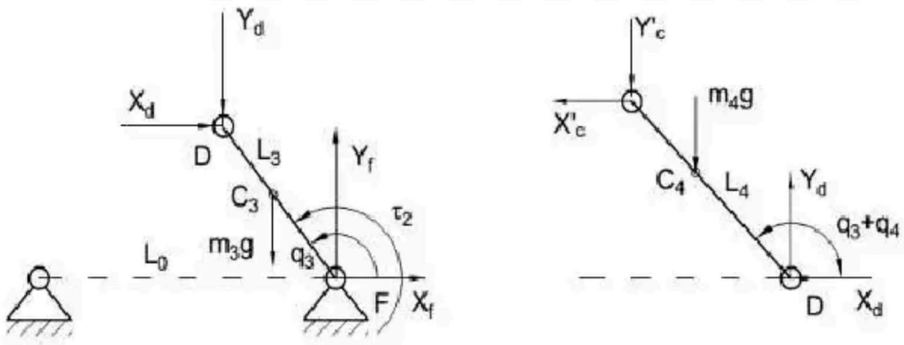
$$\begin{aligned} X_C &= f_1'\left(\tau_1,q,\dot{q},\ddot{q}\right) \\ Y_C &= g_1'\left(\tau_1,q,\dot{q},\ddot{q}\right) \end{aligned} \qquad (8)$$

*Nhánh bên phải:

Chọn tọa độ suy rộng đủ

$$\mathbf{q}^{(2)}=\begin{bmatrix} q_3 & q_4 \end{bmatrix}^T \qquad (9)$$

Tách tay phải thành 2 cấu trúc con như sau:



Hình 5.8. Các cấu trúc con của nhánh bên phải robot

Ta có:

$$\mathbf{f}_3 = \begin{bmatrix} X_f + X_d \\ Y_f - Y_d - m_3 g \\ 0 \end{bmatrix};\ \mathbf{f}_4 = \begin{bmatrix} -X_d - X'_c \\ Y_d + Y'_c - m_4 g \\ 0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$\mathbf{M}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_2 + a_3 s_3 X_f - a_3 c_3 Y_f - X_d s_3 (\mathrm{L}_3 - \mathrm{a}_3) - Y_d c_3 (\mathrm{L}_3 - a_3) \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$\mathbf{M}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -a_4 s_{34} X_d - a_4 c_{34} Y_d + X_c . s_{34} (\mathrm{L}_4 - \mathrm{a}_4) - Y_c c_{34} (\mathrm{L}_4 - a_4) \end{bmatrix} \tag{12}$$

Phương trình vi phân Newton-Euler của nhánh bên phải có dạng:

$$\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q}, \mathrm{t})\ddot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{k}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathrm{t}) = \bar{\mathbf{Q}} \tag{13}$$

Với:

$$\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q}, \mathrm{t}) = \begin{bmatrix} m_3 \mathbf{J}_{T3} \\ m_4 \mathbf{J}_{T4} \\ \mathbf{I}_3 \mathbf{J}_{R3} \\ \mathbf{I}_4 \mathbf{J}_{R4} \end{bmatrix};\ \bar{\mathbf{k}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathrm{t}) = \begin{bmatrix} m_3 \dot{\mathbf{J}}_{T3} \dot{\mathbf{q}} \\ m_4 \mathbf{J}_{T4} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{I}_3 \mathbf{J}_{R3} \dot{\mathbf{q}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_3 \mathbf{I}_3 \boldsymbol{\omega}_3 \\ \mathbf{I}_4 \mathbf{J}_{R4} \dot{\mathbf{q}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_4 \mathbf{I}_4 \boldsymbol{\omega}_4 \end{bmatrix};\ \bar{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_3 \\ \mathbf{f}_4 \\ \mathbf{M}_3 \\ \mathbf{M}_4 \end{bmatrix} \tag{14}$$

Ta tiến hành khử các phản lực liên kết lý tưởng X_a , Y_a , X_b , Y_b về dạng tối giản bằng cách nhân vào bên trái cả vế phải và vế trái phương trình (14) với ma trận chuyển vị của ma trận Jacobian tổng hợp:

$$\bar{\mathbf{J}}^T(\mathbf{q}, \mathrm{t}) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{T3}^T & \mathbf{J}_{T4}^T & \mathbf{J}_{R3}^T & \mathbf{J}_{R4}^T \end{bmatrix} \tag{15}$$

Thế các biểu thức tìm được vào phương trình (13), ta rút ra được ra được X,Y như sau:

$$\begin{aligned} X &= f_2' (\tau_2, q, \dot{q}, \ddot{q}) \\ Y &= g_2' (\tau_2, q, \dot{q}, \ddot{q}) \end{aligned} \tag{16}$$

Ta có điều kiện ràng buộc tại khớp quay C:

$$X_c - X'_c = 0$$
$$Y_c - Y'_c = 0 \qquad (17)$$

Giải (8), (16), (17) ta tìm được các momen τ_1, τ_2 tại khớp 1 và khớp 3, đó cũng chính là phương trình động lực học thuận của hệ.

5.3. PHƯƠNG TRÌNH LAGRANGE LOẠI HAI CỦA HỆ NHIỀU VẬT

Các phương trình Lagrange loại hai thường được áp dụng để thiết lập chương trình vi phân chuyển đông của hệ nhiều vật holonom có cấu trúc cây.

5.3.1. Thiết lập phương trình Lagrange loại hai

a) Một vài công thức động học cần thiết

Giả sử vị trí của mỗi chất điểm thuộc hệ là hàm của các tọa độ suy rộng và thời gian

$$\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, ..., q_m, t), q_i = q_i(t) \quad (i = 1, ..., m) \qquad (5.34)$$

Đạo hàm hệ thức (5.34) theo thời gian t ta được

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \sum_{i=0}^{m} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \qquad (5.35)$$

Từ đó suy ra:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} \qquad (5.36)$$

Do $\vec{v} = \vec{v}(q_1, ..., q_m, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_m, t)$ và $\frac{\partial r}{\partial q_j} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}(q_1, ..., q_n, t)$ nên ta có:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_i + \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_j \partial t} \qquad (5.37)$$

DO NOT COPY

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}\right)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_i \partial q_j}\dot{q}_i+\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_j \partial t} \qquad (5.38)$$

So sánh hai công thức ta rút ra hệ thức:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}\right)=\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)=\frac{\partial \vec{v}}{\partial q_j} \qquad (5.39)$$

b) ***Thiết lập phương trình Lagrange loại hai cho hệ n chất điểm***

Xét hệ holonom gồm *n* chất điểm và có f bậc tự do. Như vậy cơ hệ xác định bởi *f* tọa độ suy rộng đủ: $q_{1,}\ q_{2,\ldots}\ q_{f.}$. Nguyên lý d'Alambert- Lagrange đối với hệ *n* chất điểm có dạng:

$$\sum_{k=1}^{n}(\vec{F}_k^a-m_k\vec{a}_k).\delta\vec{r}_k=0 \qquad (5.40)$$

Từ (5.34) ta có

$$\delta\vec{r}_k=\sum_{i=1}^{f}\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_i}\delta q_i \qquad (5.41)$$

Thế (5.41) vào biểu thức (5.40) ta được hệ thức:

$$\sum_{i=1}^{f}\left(\sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k^a.\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_i}\right)\delta q_i-\sum_{i=1}^{f}\left(\sum_{k=1}^{n}m_k\frac{d^2\vec{r}_k}{dt^2}.\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_i}\right)\delta q_i=0 \qquad (5.42)$$

Theo định nghĩa lực suy rộng ra có:

$$Q_i=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_k^a.\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_i} \qquad (5.43)$$

Bây giờ ta biến đổi biểu thức:

$$K_i=\sum_{k=1}^{n}m_k\frac{d^2\vec{r}_k}{dt^2}.\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_i}=\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n}m_k\dot{\vec{r}}_k.\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_i}-\sum_{k=1}^{n}m_k\dot{\vec{r}}_k.\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_i}\right) \qquad (5.44)$$

Chú ý đến các công thức (5.36) và (5.39), biểu thức (5.44) có dạng

$$K_i = \frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{v}_k . \frac{\partial \vec{v}_k}{\partial \dot{q}_i} - \sum_{k=1}^{n} m_k \vec{v}_k . \frac{\partial \vec{v}_k}{\partial q_i} \qquad (5.45)$$

Các đạo hàm riêng theo $\dot{q}_i$ và q_i của biểu thức động năng $T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{v}_k^2$ có dạng:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{k=1}^{n} m_k \vec{v}_k . \frac{\partial \vec{v}_k}{\partial \dot{q}_i}; \qquad \frac{\partial T}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^{n} m_k \vec{v}_k . \frac{\partial \vec{v}_k}{\partial q_i} \qquad (5.46)$$

Chú ý đến các công thức (5.46), biểu thức (5.45) có dạng

$$K_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \qquad (5.47)$$

Thế (5.43) và (5.47) vào phương trình (5.88) ta có

$$\sum_{i=1}^{f}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i\right]\delta q_i = 0 \qquad (5.48)$$

Do các biến phân $\delta q_i (i = 1,..., f)$ độc lập với nhau nên ta có

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1,..., f) \qquad (5.49)$$

Trong đó Q_i là các lực suy rộng. Các phương trình vi phân (5.49) được gọi là phương trình Lagrange loại hai, mô tả chuyển động của các hệ holonom.

Nếu ta phân các lực tác dụng lên cơ hệ thành các lực có thế và các lực không có thế thì lực suy rộng Q_i được tính theo công thức

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + Q_i^{np} \qquad (5.50)$$

Trong đó Q_i^{np} là lực suy rộng ứng với các lực không có thế.

DO NOT COPY

Trong trường hợp lực tác dụng lên cơ hệ đề là các lực có thế thì $Q_i^{np} = 0$. Khi đó phương trình Lagrange loại hai có dạng:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial \prod}{\partial q_i} \quad (i = 1,..., f) \tag{5.51}$$

Nếu ta đưa vào ký hiệu hàm Lagrange:

$$L = T(c, \dot{q}_1,..., \dot{q}_f, t) - \prod(q_1,..., q_f) \tag{5.52}$$

Thì phương trình (5.95) có dạng:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1,..., f) \tag{5.53}$$

c) Thiết lập phương trình Lagrange loại hai cho hệ p vật rắn

Xét hệ holonom gồm p vật rắn và có *f* bậc tự do. Vị trí của cơ hệ được xác định bởi *f* có tọa độ suy rộng đủ: $q_1, q_2,..., q_f$.

Nguyên lý d'Alambert-Lagrange đối với hệ p vật rắn có dạng:

$$\int_{(S)} \left(d\overrightarrow{F^a} - dm\ddot{\vec{r}}\right).\delta\vec{r} = 0 \tag{5.54}$$

Từ (5.80) ta có:

$$\delta\vec{r} = \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \delta q_i \tag{5.55}$$

Thế (5.101) vào biểu thức (5.100) ta được hệ thức:

$$\sum_{i=1}^{f}\left(\int_{(S)} d\overrightarrow{F^a} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right)\delta q_i - \sum_{i=1}^{f}\left(\int_{(S)} dm \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right)\delta q_i = 0 \tag{5.56}$$

Theo định nghĩa lực suy rộng ta có:

$$Q_i = \int_{(S)} d\overrightarrow{F^a}.\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \tag{5.57}$$

Bây giờ ta biến đổi biểu thức:

$$K_i = \int_{(S)} dm.\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\int_{(S)} dm\dot{\vec{r}}.\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i} - \int dm\dot{\vec{r}}.\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\right) \qquad (5.58)$$

Chú ý đến các công thức (5.82) và (5.85), biểu thức trên có dạng:

$$K_i = \frac{d}{dt}\int_{(S)} dm\vec{v}.\frac{\partial\vec{v}}{\partial\dot{q}_i} - \int_{(S)} dm\vec{v}.\frac{\partial\vec{v}}{\partial q_i} \qquad (5.59)$$

Các đạo hàm riêng theo $\dot{q}_i$ và q_i của biểu thức động năng $T = \frac{1}{2}\int_{(S)} dm\overrightarrow{v^2}$ có dạng:

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i} = \int_{(S)} dm\vec{v}.\frac{\partial\vec{v}}{\partial\dot{q}_i}, \quad \frac{\partial T}{\partial q_i} = \int_{(S)} dm\vec{v}.\frac{\partial\vec{v}}{\partial q_i} \qquad (5.60)$$

Chú ý đến các công thức trên ta suy ra:

$$K_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \qquad (5.61)$$

Thế (5.101) và (5.107) vào phương trình (5.102) ta được:

$$\sum_{i=1}^{f}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i\right]\delta q_i = 0 \qquad (5.62)$$

Do các biến phân $\delta q_i (i = 1,..., f)$ là độc lập nhau nên ta có:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \qquad (i = 1,..., f) \qquad (5.63)$$

Trong đó Q_i là các lực suy rộng. Nếu ta phân các lực tác dụng lên cơ hệ thành các lực có thế và các lực không có thế thì lực suy rộng Q_i được tính theo các công thức

$$Q_i = -\frac{\partial\prod}{\partial q_i} + Q_i^{np} \qquad (5.64)$$

DO NOT COPY

Trong đó Q_i^{np} là lực suy rộng ứng với các lực không thế. Khi đó phương trình (5.109) có dạng:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=-\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}+Q_i^{np} \quad (i=1,...,f) \qquad (5.65)$$

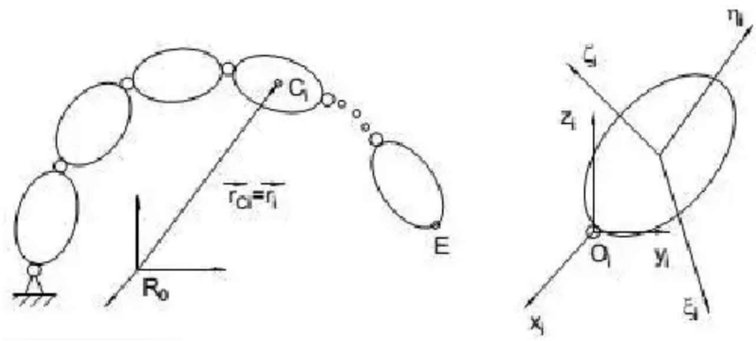
Các phương trình vi phân (5.81) được gọi là phương trình Lagrange loại hai, mô tả chuyển động của các hệ nhiều vật holonom.

5.3.2. Dạng thức Lagrange loại hai của hệ nhiều vật

Trong tính toán động học hệ nhiều vật, để xác định vị trí các khâu ta chỉ cần sử dụng hệ tọa độ cố định và hệ tọa độ khớp. Trong bài toán động lực học hệ nhiều vật ta cần thêm một hệ tọa độ nữa là hệ thọa độ khâu. Hệ tọa độ khâu là hệ quy chiếu gắn với vật rắn, thường có gốc trùng với khối tâm C_i của vật rắn, các trục hướng theo các trục quán tính chính của vật rắn. Trong hình 5.9, hệ $O_ix_iy_iz_i$ là hệ tọa độ khớp, $C_i\zeta_i\eta_i\xi_i$ là hệ tọa độ khâu.

Xét hệ p vật rắn có r liên kết holonom. Khi đó số bậc tự do của hệ là $f=6p-r$. Các tọa độ suy rộng Lagrange của hệ: $\mathbf{q}=\left[q_1...q_f\right]^T$. Vị trí khâu thứ i được xác định bởi:

- Tọa độ khối tâm của khâu: $\mathbf{r}_{Ci}=\mathbf{r}_{Ci}(\mathbf{q},t)$
- Ma trận cosin chỉ hướng của khâu: $\mathbf{A}_i=\mathbf{A}_i(\mathbf{q},t)$



Hình 5.9. Hệ tọa độ khâu

Sau đây để đơn giản, ta xét các hệ nhiều vật có cấu trúc holonom giữ và dừng. Khi đó:

$$\mathbf{r}_{Ci} = \mathbf{r}_{Ci}(\mathbf{q}), \quad \mathbf{A}_i = \mathbf{A}_i(\mathbf{q}) \tag{5.66}$$

Theo định nghĩa các ma trận Jacobi tịnh tiến và ma trận Jacobi quay được xác định bởi các công thức:

$$\mathbf{J}_{Ti} = \frac{\partial \mathbf{r}_{Ci}}{\partial \mathbf{q}}, \mathbf{J}_{Ri} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_i}{\partial \mathbf{q}} \tag{5.67}$$

Trong đó $\boldsymbol{\varphi}_i$ là véc tơ đại số trong hệ qui chiếu quán tính ứng với góc quay $\vec{\varphi}_i$ của vật rắn thứ *i,* quay quanh trục quay tức thời. Vận tốc khối tâm và vận tốc góc của vật rắn được xác định bằng công thức sau:

$$\mathbf{v}_{Ci} = \frac{d\mathbf{r}_{Ci}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}_{Ci}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_{Ti}\dot{\mathbf{q}} \tag{5.68}$$

$$\boldsymbol{\omega}_i = \frac{d\boldsymbol{\varphi}_i}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_i}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_{Ri}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \tag{5.69}$$

Theo chương 4, biểu thức động năng của vật rắn được xác định bằng biểu thức:

$$T_i = \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_{Ci}^T \mathbf{v}_{Ci} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_i^T \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i \tag{5.70}$$

Trong đó $\mathbf{I}_i$ là ma trận tenxơ quán tính khối của vật rắn đối với hệ qui chiếu cố định:

$$\mathbf{I}_i = \mathbf{A}_i \mathbf{I}_i^{(i)} \mathbf{A}_i^T \tag{5.71}$$

Trong (5.71) $\mathbf{I}_i^{(i)}$ là ma trận ten xơ quán tính khối của vật rắn thứ *i* đối với hệ qui chiếu gắn liền với với khâu. Do đó $\mathbf{I}_i^{(i)}$ là ma trận hằng số dạng đường chéo, nếu ta chọn hệ tọa độ khâu là hệ qui chiếu quán tính chính.

Từ (5.70) biểu thức động năng của hệ nhiều vật có dạng:

DO NOT COPY

$$T = \sum_{i=1}^{p} T_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p} m_i \mathbf{v}_{Ci}^T \mathbf{v}_{Ci} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p} \boldsymbol{\omega}_i^T \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i \tag{5.72}$$

Thay (5.68) và (5.69) vào (5.72) ta được:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p} m_i (\mathbf{J}_{Ti}\dot{\mathbf{q}})^T (\mathbf{J}_{Ti}\dot{\mathbf{q}}) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p} (\mathbf{J}_{Ri}\dot{\mathbf{q}})^T \mathbf{I}_i (\mathbf{J}_{Ri}\dot{\mathbf{q}}) \\ T &= \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \left\{ \sum_{i=1}^{p} m_i \mathbf{J}_{Ti}^T \mathbf{J}_{Ti} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p} \mathbf{J}_{Ri}^T \mathbf{I}_i \mathbf{J}_{Ri} \right\} \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \tag{5.73}$$

Nếu ta đưa vào kí hiệu:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{p} m_i \mathbf{J}_{Ti}^T \mathbf{J}_{Ti} + \sum_{i=1}^{p} \mathbf{J}_{Ri}^T \mathbf{I}_i \mathbf{J}_{Ri} \tag{5.74}$$

Thì biểu thức động năng robot (5.73) được viết dưới dạng:

$$T = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \tag{5.75}$$

Ma trận $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ là ma trận vuông cấp f và được gọi là ma trận khối lượng suy rộng. Chú ý rằng ma trận này là ma trận xác định dương và đối xứng. Thế năng trọng lực mỗi khâu của hệ được xác định bởi biểu thức:

$$\prod_i = -m_i \mathbf{g}_0^T \mathbf{r}_{Ci} \tag{5.76}$$

Trong đó:

$$\mathbf{g}_0^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -g \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{Ci} = \begin{bmatrix} x_{Ci} & y_{Ci} & z_{Ci} \end{bmatrix}^T \tag{5.77}$$

$$\mathbf{g}_0^T \mathbf{r}_{Ci} = -g z_{Ci} \tag{5.78}$$

Thế năng của hệ trọng lực nhiều vật có dạng:

$$\prod = -\sum_{i=1}^{p} m_i \mathbf{g}_0^T \mathbf{r}_{Ci} \tag{5.79}$$

Xuất phát từ phương trình Lagrange loại 2:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial \prod}{\partial q_i} + Q_i^* \quad , \; i = 1,2,\ldots f \tag{5.80}$$

Suy ra phương trình Lagrange loại 2 dạng ma trận:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i}\right)^T - \left(\frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}_i}\right)^T = -\left(\frac{\partial \prod}{\partial \mathbf{q}_i}\right)^T + \mathbf{f}^* \qquad (5.81)$$

Trong đó:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \dots & q_f \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{f}^* = \begin{bmatrix} Q_1^* & Q_2^* & \dots & Q_f^* \end{bmatrix}^T \qquad (5.82)$$

Trong nhiều bài toán kỹ thuật, người ta thường ký hiệu mômen động cơ bằng $\tau_i = Q_i^*$. Từ biểu thức động năng (5.75) ta có:

$$T = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{f}\sum_{k=1}^{f} m_{jk}(\mathbf{q})\dot{q}_j\dot{q}_k \qquad (5.83)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^{f} m_{ij}(\mathbf{q})\dot{q}_j \qquad (5.84)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) = \sum_{j=1}^{f} m_{ij}(\mathbf{q})\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{f}\frac{dm_{ij}(\mathbf{q})}{dt}\dot{q}_j = \sum_{j=1}^{f} m_{ij}(\mathbf{q})\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{f}\sum_{k=1}^{f}\frac{\partial m_{ij}(\mathbf{q})}{\partial q_k}\dot{q}_k\dot{q}_j \qquad (5.85)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{f}\sum_{k=1}^{f}\frac{\partial m_{ij}(\mathbf{q})}{\partial q_i}\dot{q}_j\dot{q}_k \qquad (5.86)$$

Từ biểu thức thế năng trọng lực (5.79) ta có:

$$\frac{\partial \prod}{\partial q_i} = -\sum_{j=1}^{p} m_j \mathbf{g}_0^T \frac{\partial \mathbf{r}_{Cj}}{\partial q_i} = g_i(\mathbf{q}) \qquad (5.87)$$

Thế (5.85), (5.86), và (5.97) vào phương trình (5.80) ta được:

$$\sum_{j=1}^{f} m_{ij}(\mathbf{q})\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{f}\sum_{k=1}^{f}\frac{\partial m_{ij}(\mathbf{q})}{\partial q_k}\dot{q}_k\dot{q}_j - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{f}\sum_{k=1}^{f}\frac{\partial m_{jk}(\mathbf{q})}{\partial q_i}\dot{q}_j\dot{q}_k + g_i(\mathbf{q}) = \tau_i \qquad (5.88)$$

$$\sum_{j=1}^{f} m_{ij}(\mathbf{q})\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{f}\sum_{k=1}^{f}\left(\frac{\partial m_{ij}(\mathbf{q})}{\partial q_k} - \frac{1}{2}\frac{\partial m_{jk}(\mathbf{q})}{\partial q_i}\right)\dot{q}_k\dot{q}_j + g_i(\mathbf{q}) = \tau_i, \qquad (5.89)$$

$$i = 1 \dots f$$

DO NOT COPY

Chú ý:

$$\sum_{j=1}^{f}\sum_{k=1}^{f}\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k}\dot{q}_k\dot{q}_j = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{f}\sum_{k=1}^{f}\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k}\dot{q}_k\dot{q}_j + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{f}\sum_{j=1}^{f}\frac{\partial m_{ik}}{\partial q_j}\dot{q}_j\dot{q}_k$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{f}\sum_{k=1}^{f}\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k}\dot{q}_k\dot{q}_j + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{f}\sum_{j=1}^{f}\frac{\partial m_{ki}}{\partial q_j}\dot{q}_j\dot{q}_k, \quad (\text{do } m_{ik} = m_{ki}) \qquad (5.90)$$

Vì vậy ta có hệ thức:

$$h_{ijk}(\mathbf{q}) = \frac{\partial m_{ij}(\mathbf{q})}{\partial q_k} - \frac{1}{2}\frac{\partial m_{jk}(\mathbf{q})}{\partial q_i} = \frac{1}{2}(m_{ij,k}(\mathbf{q}) + m_{ki,j}(\mathbf{q}) - m_{jk,i}(\mathbf{q})) \qquad (5.91)$$

Thay (5.91) vào phương trình (5.89) ta nhận được phương trình vi phân chuyển động của robot:

$$\sum_{j=1}^{f} m_{ij}(\mathbf{q})\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{f}\sum_{k=1}^{f} h_{ijk}(\mathbf{q})\dot{q}_k\dot{q}_j + g_i(\mathbf{q}) = \tau_i \qquad (5.92)$$

Nếu ta đưa vào ký hiệu:

$$c_{ij}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \sum_{k=1}^{f} h_{ijk}(\mathbf{q})\dot{q}_k \qquad (5.93)$$

Thì:

$$\sum_{j=1}^{f}\sum_{k=1}^{f} h_{ijk}\dot{q}_k\dot{q}_j = \sum_{j=1}^{f} c_{ij}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\dot{q}_j \qquad (5.94)$$

Thay (5.94) vào (5.92) ta được:

$$\sum_{j=1}^{f} m_{ij}(\mathbf{q})\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{f} c_{ij}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\dot{q}_j + g_i(\mathbf{q}) = \tau_i \ , \ i=1,...,f \qquad (5.95)$$

Hệ phương trình vi phân chuyển động (5.95) có thể viết dưới dạng ma trận như sau:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}(t) \qquad (5.96)$$

Trong đó ***M*** là ma trận khối lượng suy rộng, ***C*** là ma trận ly tâm – Coriolis. Thành phần $\mathbf{C}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$ là đại diện cho lực quán tính ly tâm và quán tính Coriolis tác dụng lên hệ.

Xét biểu thức:

$$\sum_{j=1}^{f}\sum_{k=1}^{f} h_{ijk}\dot{q}_k\dot{q}_j = \sum_{j=1}^{f} c_{ij}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\dot{q}_j \qquad (5.97)$$

Khi $j=k$: $h_{ijk}\dot{q}_k\dot{q}_j = h_{ijk}\dot{q}_j^2$ tương đương với hiệu ứng ly tâm (*Centrifugal effect*).

Khi $j \neq k$: $h_{ijk}\dot{q}_k\dot{q}_j$ tương đương với hiệu ứng coriolis (*Coriolis effect*).

Nếu kể thêm lực ma sát nhớt và ma sát Culông, phương trình (5.96) có dạng:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}_v\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}_s sign(\dot{\mathbf{q}}) + g(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}(t) \qquad (5.98)$$

Trong đó $\mathbf{D}_v$ và $\mathbf{D}_s$ là các ma trận hệ số đường chéo.

5.3.3. Dạng ma trận của phương trình Lagrange loại hai

Việc áp dụng các phương trình Lagrange loại hai thiết lập phương trình vi phân chuyển dộng của hệ nhiều vật không gian nói chung là các bài toán khá phức tạp. Đặc biệt là việc tính toán ma trận quán tính ly tâm và Coriolis **C**. Vì vậy người ta đã thiết lập nhiều phần mềm tính toán động lực học của hệ nhiều vật nói chung và robot nói riêng. Trong mục này ta sẽ trình bày một thuật toán tự động hóa việc thiết lập các phương trình vi phân chuyển động của hệ nhiều vật. Với thuật toán này chúng ta dễ dàng thiết lập các phương trình vi phân của chuyển động của robot nếu biết sử dụng phần mềm MAPLE.

Như đã biết động năng của robot có dạng:

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T\mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T\mathbf{b}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) \qquad (5.99)$$

Trong đó để thuận tiện cho việc chứng minh ta đưa vào vec tơ

$$\mathbf{b}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}},\ \mathbf{b} = \left[b_1,...,b_n\right]^T \qquad (5.100)$$

Trong phương trình Lagrange loại hai có dạng:

DO NOT COPY

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right)^T - \left(\frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}}\right)^T + \left(\frac{\partial \prod}{\partial \mathbf{q}}\right)^T = \boldsymbol{\tau} \qquad (5.101)$$

Sử dụng định lý đạo hàm riêng theo biến véc tơ của tích hai ma trận (xem chương 1), ta có:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\dot{\mathbf{q}}^T\mathbf{b}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{b}\otimes\mathbf{E}_n) + \dot{\mathbf{q}}^T\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) \qquad (5.102)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{b}\otimes\mathbf{E}_n) &= \begin{bmatrix}\mathbf{e}_1^T & \dots & \mathbf{e}_n^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1\mathbf{E}_n \\ \dots \\ b_n\mathbf{E}_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}b_1\mathbf{e}_1^T\mathbf{E}_n & \dots & b_n\mathbf{e}_n^T\mathbf{E}_n\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}b_1 & \dots & b_n\end{bmatrix} = \mathbf{b}^T = (\mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}})^T = \dot{\mathbf{q}}^T\mathbf{M}(\mathbf{q})\end{aligned} \qquad (5.103)$$

Mặt khác:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}}^T\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} &= \dot{\mathbf{q}}^T\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{q}}^T\left(\frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{q})}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\dot{\mathbf{q}}\otimes\mathbf{E}_n) + \mathbf{M}(\mathbf{q})\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) \\ &= \dot{\mathbf{q}}^T(\mathbf{0} + \mathbf{M}(\mathbf{q})\mathbf{E}_n) = \dot{\mathbf{q}}^T\mathbf{M}(\mathbf{q})\end{aligned} \qquad (5.104)$$

Thay (5.103) và (5.104) vào (5.102) ta được:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \dot{\mathbf{q}}^T\mathbf{M}(\mathbf{q}) \Leftrightarrow \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right)^T = \mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right)^T = \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{E}_n\otimes\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}\end{aligned} \qquad (5.105)$$

Tính toán tương tự ta có:

$$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}(\dot{\mathbf{q}}^T\mathbf{b}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{b}\otimes\mathbf{E}_n) + \dot{\mathbf{q}}^T\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{q}}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{0} + \dot{\mathbf{q}}^T\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{q}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}\left(\mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}\right) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T\left(\frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}(\dot{\mathbf{q}}\otimes\mathbf{E}_n) + \mathbf{M}(\mathbf{q})\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{q}}\right) \qquad (5.106)$$

$$= \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T\left(\frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}(\dot{\mathbf{q}}\otimes\mathbf{E}_n) + \mathbf{0}\right) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T\frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}(\dot{\mathbf{q}}\otimes\mathbf{E}_n)$$

Thay (5.105) và (5.106) vào (5.101) ta được:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{E}_n\otimes\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2}\left(\dot{\mathbf{q}}^T\frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}(\dot{\mathbf{q}}\otimes\mathbf{E}_n)\right)^T + \frac{\partial \prod}{\partial \mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau} \qquad (5.107)$$

Ta đưa vào các ký hiệu:

$$\mathbf{C}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{E}_n\otimes\dot{\mathbf{q}}) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}(\dot{\mathbf{q}}\otimes\mathbf{E}_n)\right)^T, \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \left(\frac{\partial \prod}{\partial \mathbf{q}}\right)^T \qquad (5.108)$$

Ma trận $\mathbf{C}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$ được gọi là ma trận ly tâm và Coriolis. Khi đó phương trình vi phân chuyển động của robot (5.107) có dạng:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \qquad (5.109)$$

5.4. PHƯƠNG TRÌNH LAGRANGE DẠNG NHÂN TỬ CỦA HỆ NHIỀU VẬT

Các phương trình Lagrange dạng nhân tử thường được áp dụng để thiết lập chương trình vi phân chuyển động của hệ nhiều vật hôlônôm có cấu trúc mạch vòng và hệ nhiều vật hôlônôm.

5.4.1. Thiết lập phương trình Lagrange dạng nhân tử

a) Thiết lập phương trình Lagrange loại hai cho hệ n chất điểm

Cho hệ gồm *n* chất điểm, vị trí của nó được xác định bởi *m* tọa độ suy rộng dư: $q_1, q_2, ..., q_m$. Hệ chịu *r* liên kết hôlônôm, s liên kết phi hôlônôm tuyến tính lần lượt như (5.110) và (5.111):

$$f_i(q_1, q_2, ..., q_m, t) = 0 (i = 1,2,...,r) \qquad (5.110)$$

DO NOT COPY

$$\sum_{k=1}^{m} a_{jk}\dot{q}_k + a_{j0} = 0\,(j = 1,2,...,s) \qquad (5.111)$$

Từ các phương trình trên ta thiết lập được phương trình ràng buộc các biến phân δq_k (các di chuyển ảo):

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{f_i}{\partial q_k}\delta q_k = 0\,(i = 1,2,...,r) \qquad (5.112)$$

$$\sum_{k=1}^{m} a_{jk}\delta_k = 0\,(j = 1,2,...,s) \qquad (5.113)$$

Nguyên lý d'Alambert- Lagrange đối với hệ *n* chất điểm có dạng:

$$\sum_{j=1}^{m} (\vec{F}_j^{\,a} - m_j\vec{a}_j).\delta\vec{r}_j = 0 \qquad (5.114)$$

Thực hiện biến đổi (5.114) tương tự như khi thiết lập phương trình Lagrange loại hai cho hệ n chất điểm ta có

$$\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k\right]\delta q_k = 0 \qquad (5.115)$$

Do các biến phân δq_k không độc lập với nhau, chúng liên hệ với nhau ở các phương trình (5.112), (5.113). Biến đổi (5.114), (5.115) và rút gọn ta được phương trình Lagrange loại hai dạng nhân tử cho hệ phi hôlônôm với các liên kết phi hệ hôlônôm tuyến tính:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_k - \sum_{i=1}^{r}\lambda_i\frac{\partial f_i}{\partial q_k} - \sum_{j=1}^{s}\mu_j a_{jk}\ (k = 1,2,...,m) \qquad (5.116)$$

Chú ý: cùng với m phương trình vi phân (5.116) còn có *r* phương trình liên kết phi hôlônôm (5.110), *s* phương trình liên kết phi hôlônôm tuyến tính (5.111). Như vậy ta có hệ gồm $m + r + s$ phương trình vi phân đại số. Hệ phương trình vi phân dùng để xác định *m* tọa độ suy rộng dư, *r* nhân tử λ_i và s nhân tử μ_i.

Nếu hệ chỉ chịu các liên kết hôlônôm, các phương trình Lagrange dạng nhân tử (5.116) và (5.110) có dạng:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_k-\sum_{i=1}^{r}\lambda_i\frac{\partial f_i}{\partial q_k}\ (k=1,2,...,m)$$
$$f_i(q_1,q_2,...,q_m,t)=0\ (i=1,2,...,r) \qquad (5.117)$$

b) Thiết lập phương trình Lagrange dạng nhân tử cho hệ p vật rắn

Xét hệ gồm *p* vật rắn. Vị trí của cơ hệ được xác định bởi *m* tọa độ suy rộng dư: $q_1, q_2, \ldots, q_m$. Hệ chịu *r* liên kết hôlônôm, *s* liên kết phi hôlônôm tuyến tính lần lượt như (5.118) và (5.119):

$$f_i(q_1,q_2,...,q_m,t)=0\ (i=1,2,...,r) \qquad (5.118)$$

$$\sum_{k=1}^{m}a_{jk}\dot{q}_k+a_{j0}=0\ (j=1,2,..,s) \qquad (5.119)$$

Tọa độ suy rộng độc lập của hệ nhiều vật: $n = m - r$

Số bậc tự do của của hệ: f = n – s = m – (r+s)

Nguyên lý d'Alambert-Lagrange đối với hệ p vật rắn có dạng:

$$\int_{(S)}\left(d\vec{F^a}-dm\ddot{\vec{r}}\right).\delta\vec{r}=0 \qquad (5.120)$$

Với:

$$\delta\vec{r}=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\delta q_i \qquad (5.121)$$

Thực hiện biến đổi tương tự như khi thiết lập phương trình Lagrange loại hai cho hệ p vật rắn ta có:

$$\sum_{i=1}^{m}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}-Q_i\right]\delta q_i=0 \qquad (5.122)$$

Ở đây các biến phân $\delta q_i\ (i=1,..,m)$ không độc lập với nhau, mà được liên hệ với nhau ở các phương trình liên kết (5.118), (5.119).

DO NOT COPY

Sau khi biến đổi tương tự như phần hệ n chất điểm, được phương trình Lagrange loại hai dạng nhân tử cho hệ p vật rắn gồm các liên kết hôlônôm và các liên kết phi hệ hôlônôm tuyến tính:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_k-\sum_{i=1}^{r}\lambda_i\frac{\partial f_i}{\partial q_k}-\sum_{j=1}^{s}\mu_j a_{jk}\ (k=1,2,...,m) \qquad (5.123)$$

Từ (5.123), (5.118) và (5.119) có hệ phương trình gồm $m + r + s$ phương trình vi phân đại số. Trong đó có m phương trình vi phân (5.123), r phương trình liên kết hôlônôm (5.118), s phương trình liên kết phi hôlônôm tuyến tính (5.119). Hệ phương trình vi phân dùng để xác định m tọa độ dư, r nhân tử λ_i và s nhân tử μ_i.

Nếu hệ chỉ chịu các liên kết hôlônôm từ (5.123) có được các phương trình Lagrange dạng nhân tử có dạng:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_k-\sum_{i=1}^{r}\lambda_i\frac{\partial f_i}{\partial q_k}\ (k=1,2,...,m) \qquad (5.124)$$

5.4.2. Dạng ma trận của phương trình Lagrange loại hai dạng nhân tử

Xét hệ p vật rắn chịu r liên kết hôlônôm, s liên kết phi hôlônôm giữ và dừng. Vị trí của cơ hệ được xác định bởi m tọa độ suy rộng dư: $q_1, q_2, \ldots, q_m$. Giả sử hệ chịu r liên kết hôlônôm dừng:

$$f_i(q_1,q_2,...,q_m)=0,\ (i=1,2,...,r) \qquad (5.125)$$

Phương trình Lagrange dạng nhân tử có dạng:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_k-\sum_{i=1}^{r}\lambda_i\frac{\partial f_i}{\partial q_k},\ (k=1,2,...,m) \qquad (5.126)$$

Biến đổi (5.126) về dạng ma trận ta được phương trình Lagange loại hai dạng nhân tử như sau:

$$\mathbf{M(q)\ddot{q}+C(q,\dot{q})\dot{q}+g(q)+\Phi}_q^T\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\tau} \qquad (5.127)$$

Trong đó:

$\mathbf{M}(\mathbf{q})$ - ma trận khối lượng suy rộng có dạng:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{p} \left(m_i \mathbf{J}_{T_i}^T \mathbf{J}_{T_i} + \mathbf{J}_{R_i}^T \mathbf{I}_i \mathbf{J}_{R_i} \right) \qquad (5.128)$$

$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ - ma trận lực ly tâm và Coriolis được các định theo công thức:

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} (\mathbf{E}_n \otimes \dot{\mathbf{q}}) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} (\dot{\mathbf{q}} \otimes \mathbf{E}_n) \right)^T \qquad (5.129)$$

g(q) – véctơ các lực suy rộng có thế của hệ:

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \qquad (5.130)$$

$\mathbf{\Phi}_q$ - Ma trận Jacobi có dạng:

$$\mathbf{\Phi}_q = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial q_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_r}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_r}{\partial q_m} \end{bmatrix} \qquad (5.131)$$

5.5. PHƯƠNG PHÁP TÁCH CẤU TRÚC TRONG HỆ NHIỀU VẬT

5.5.1. Mở rộng nguyên lý giải phóng liên kết Lagrange

Một hệ nhiều vật rắn được liên kết với nhau bằng các khớp. Hệ đang chuyển động được tách ra thành nhiều hệ con bằng cách giải phóng liên kết tại một số khớp sao cho đảm bảo điều kiện tương đương về động lực sau:

- Các điều kiện tương đương về lực: Thay thế liên kết tại các khớp được giải phóng bằng các phản lực liên kết tương ứng.

- Các điều kiện tương đương về dịch chuyển: Các tọa độ suy rộng xác định chuyển động của các hệ con phải thỏa mãn các điều kiện ràng buộc toàn cục khi hệ chưa bị tách.

DO NOT COPY

5.5.2. Các phương trình vi phân chuyển động của các cấu trúc con và phương trình vi phân – đại số của cấu trúc tổng thể

Một hệ nhiều vật có cấu trúc mạch vòng được tách thành các hệ con. Mỗi hệ con sau tách là một hệ nhiều vật có cấu trúc cây. Nên chọn số lượng hệ con để tách là tối thiểu.

Xét một hệ nhiều vật rắn có cấu trúc mạch vòng, giả sử ta giải phóng n_j khớp và tạo thành n_k hệ con. Dùng phương trình Lagrange loại hai thành lập phương trình vi phân chuyển động cho từng hệ con.

Các tọa độ suy rộng của hệ con thứ *i*: $\mathbf{q}^i = \left[q_1^{(i)}, q_2^{(i)}, ..., q_{fi}^{(i)} \right]$

Các lực hoạt động suy rộng của hệ con thứ *i*: $\mathbf{Q}^{ia} = \left[Q_1^{ia}, Q_2^{ia}, ..., Q_{fi}^{ia} \right]$

Các lực liên kết suy rộng của hệ con thứ *i*: $\mathbf{Q}^{ic} = \left[Q_1^{ic}, Q_2^{ic}, ..., Q_{fi}^{ic} \right]$

Phương trình Lagrange loại hai của hệ con thứ *i*:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j^{(i)}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j^{(i)}} = Q_j^{ia} + Q_j^{ic} \ (j = 1, 2, ..., f_i) \qquad (5.132)$$

Ở đây f_i là số bậc tự do của hệ con thứ i. Cho i chạy từ 1 đến n_k ta được các phương trình vi phân chuyển động của n_k hệ con.

Kí hiệu tọa độ suy rộng:

$$\mathbf{q} = \left[q_1^{(i)}, ..., q_{fi}^{(i)}, ..., \mathrm{q}_1^{(\mathrm{n_k})}, ..., q_{fi_K}^{(\mathrm{n_k})} \right]^T = \left[q_1, \mathrm{q}_2, ..., q_m \right]^T \qquad (5.133)$$

Các phương trình liên kết của hệ mẹ (hệ tổng thể) có dạng:

$$f_i(q_1, q_2, ..., q_m) = 0, (i = 1, 2, ..., r) \qquad (5.134)$$

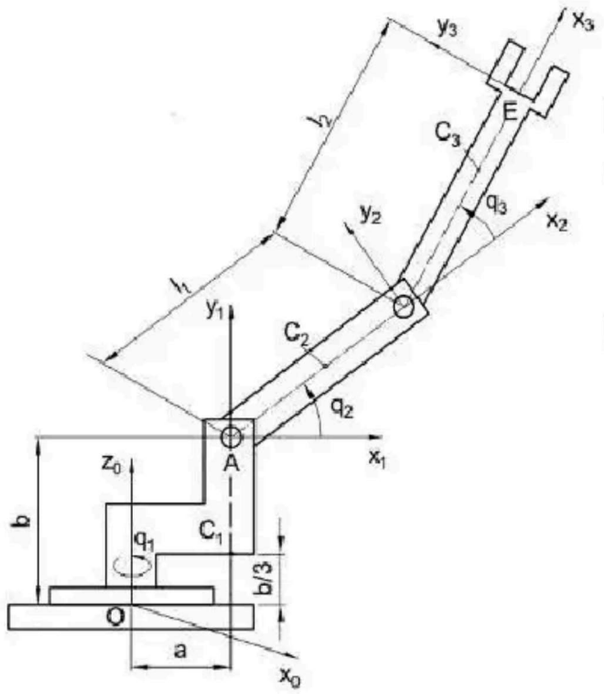
Hệ các phương trình (5.132), (5.134) lập thành hệ phương trình vi phân đại số mô tả chuyển động của hệ nhiều vật chịu liên kết mạch vòng.

5.5.3. Các ví dụ áp dụng phương trình Lagrange loại II

Ví dụ 5.4: Cho robot ba khâu có kích thước như hình 5.10. Ký hiệu khối tâm của khâu thứ i là C_i. Khối lượng các khâu là m_i (i = 1,…,3), mômen quán tính đối với trục đi qua khối tâm I_i (i = 1,…,3). Hãy thiết lập phương

trình vi phân chuyển động của robot sử dụng các phương trình Lagrange loại hai.

Lời giải:



Hình 5.10. Robot ba khâu

Bảng 5.4. Bảng tham số động học Denavit-Hartenberg

Trục	θ_i	d_i	α_i	a_i
1	q_1	b	a	$\pi/2$
2	q_2	0	l_1	0
3	q_3	0	l_2	0

Bảng 5.5. Tham số động lực học của robot

Khâu	Tọa độ khối tâm địa phương	Khối lượng	Ma trận momen quán tính I ($kg.mm^2$)

	x_c	y_c	z_c		I_{xx}	I_{yy}	I_{zz}	I_{xy}	I_{yz}	I_{zx}
1	0	-2b/3	0	m_1	I_{xx1}	I_{yy1}	I_{zz1}	0	0	0
2	0	$-l_1/2$	0	m_2	I_{xx2}	I_{yy2}	I_{zz2}	0	0	0
3	$-l_2/2$	0	0	m_3	I_{xx3}	I_{yy3}	I_{zz3}	0	0	0

Ma trận chuyển trong hệ tọa độ địa phương:

$$\mathbf{H_{01}} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & \mathrm{a}c_1 \\ s_1 & 0 & -c_1 & \mathrm{a}s_1 \\ 0 & 1 & 0 & \mathrm{b} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{H_{12}} = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & \mathrm{l}_1 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & \mathrm{l}_1 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H_{23}} = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & \mathrm{l}_2 c_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & \mathrm{l}_2 s_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Ma trận chuyển trong hệ tọa độ toàn cục:

$$\mathbf{H_{02}} = \mathbf{H_{01}}\mathbf{H_{12}} = \begin{bmatrix} c_1c_2 & -c_1s_2 & s_1 & \mathrm{a}c_1 + l_1c_1c_2 \\ s_1c_2 & -s_1s_2 & -c_1 & \mathrm{a}s_1 + l_1s_1c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & \mathrm{b} + l_1s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H_{03}} = \mathbf{H_{01}}\mathbf{H_{12}}\mathbf{H_{23}} = \begin{bmatrix} c_1c_{23} & -c_1s_{23} & s_1 & \mathrm{a}c_1 + l_1c_1c_2 + l_2c_1c_{23} \\ s_1c_{23} & -s_1s_{23} & -c_1 & \mathrm{a}s_1 + l_1s_1c_2 + l_2s_1c_{23} \\ s_{23} & c_{23} & 0 & \mathrm{b} + l_1s_2 + l_2s_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

Vị trí của khối tâm của khâu trong hệ tọa độ gắn liền với khâu:

$$\mathbf{u}_{C1}^{(1)}=\begin{bmatrix}0\\-2b/3\\0\\1\end{bmatrix};\mathbf{u}_{C2}^{(2)}=\begin{bmatrix}0\\-l_1/2\\0\\1\end{bmatrix};\mathbf{u}_{C3}^{(3)}=\begin{bmatrix}-l_2/2\\0\\0\\1\end{bmatrix} \quad (2)$$

Vị trí các khối tâm của khâu trong hệ tọa độ cố định được tính theo công thức sau:

$$^{in}\mathbf{r}_{C_i}=\mathbf{H}_{0i}\mathbf{u}_{C_i}^{(i)} \quad (3)$$

Từ (5.184) ta suy ra:

$$\mathbf{r}_{C1}^{(0)}=\begin{bmatrix}\mathrm{ac}_1\\ \mathrm{as}_1\\ \mathrm{b}/3\end{bmatrix},\quad \mathbf{r}_{C2}^{(0)}=\begin{bmatrix}(\mathrm{c}_1(2\mathrm{a}+\mathrm{l}_1\mathrm{c}_2))/2\\(\mathrm{s}_1(2\mathrm{a}+\mathrm{l}_1\mathrm{c}_2))/2\\ \mathrm{b}+(\mathrm{l}_1\mathrm{s}_2)/2\end{bmatrix},$$
$$\mathbf{r}_{C3}^{(0)}=\begin{bmatrix}(\mathrm{c}_1(2\mathrm{a}+\mathrm{l}_2\mathrm{c}_{23}+2\mathrm{l}_1\mathrm{c}_2))/2\\(\mathrm{s}_1(2\mathrm{a}+\mathrm{l}_2\mathrm{c}_{23}+2\mathrm{l}_1\mathrm{c}_2))/2\\ \mathrm{b}+(\mathrm{l}_2\mathrm{s}_{23})/2+\mathrm{l}_1\mathrm{s}_2\end{bmatrix} \quad (4)$$

Ma trận Jacobi tịnh tiến và đạo hàm của chúng được tính như sau

$$\mathbf{J}_{T1}=\frac{\partial\mathbf{r}_{C1}^{(0)}}{\partial\mathbf{q}}=\begin{bmatrix}-\mathrm{as}_1&0&0\\ \mathrm{ac}_1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\ \dot{\mathbf{J}}_{T1}=\begin{bmatrix}-\mathrm{a}\dot{\mathrm{q}}_1c_1&0&0\\-\mathrm{a}\dot{\mathrm{q}}_1\mathrm{c}_1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\mathbf{J}_{T2}=\frac{\partial\mathbf{r}_{C2}^{(0)}}{\partial\mathbf{q}}=\begin{bmatrix}-(\mathrm{s}_1(2\mathrm{a}+\mathrm{l}_1\mathrm{c}_2))/2&-(\mathrm{l}_1\mathrm{c}_1\mathrm{s}_2)/2&0\\(\mathrm{c}_1(2\mathrm{a}+\mathrm{l}_1\mathrm{c}_2))/2&-(\mathrm{l}_1\mathrm{s}_1\mathrm{s}_2)/2&0\\0&(\mathrm{l}_1\mathrm{c}_2)/2&0\end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\dot{\mathbf{J}}_{T2}=\begin{bmatrix}(-\dot{\mathrm{q}}_1c_1(2\mathrm{a}+\mathrm{l}_1\mathrm{c}_2)+\dot{\mathrm{q}}_2\mathrm{l}_1\mathrm{s}_1\mathrm{s}_2)/2&1_1(\dot{\mathrm{q}}_1\mathrm{s}_1\mathrm{s}_2-\dot{\mathrm{q}}_2\mathrm{c}_1\mathrm{c}_2)/2&0\\(-\dot{\mathrm{q}}_1\mathrm{s}_1(2\mathrm{a}+l_1\mathrm{c}_2)-\dot{\mathrm{q}}_2\mathrm{l}_1\mathrm{c}_1\mathrm{s}_2)/2&-\mathrm{l}_1(\dot{\mathrm{q}}_1\mathrm{c}_1\mathrm{s}_2-\dot{\mathrm{q}}_2\mathrm{s}_1\mathrm{c}_2)/2&0\\0&-\mathrm{l}_1\dot{\mathrm{q}}_2s_2/2&0\end{bmatrix} \quad (7)$$

DO NOT COPY

$$\mathbf{J}_{T3} = \frac{\partial \mathbf{r}_{C3}^{(0)}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -s_1(2a + l_2c_{23} + 2l_1c2)/2 & -c_1(l_2s_{23} + 2l_1s_2)/2 & -l_2s_{23}c_1/2 \\ c_1(2a + l_2c_{23} + 2l_1c2)/2 & -s_1(l_2s_{23} + 2l_1s_2)/2 & -l_2s_{23}s_1/2 \\ 0 & l_2c_{23}/2 + l_1c_2 & l_2c_{23}/2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\dot{\mathbf{J}}_{T3} = \begin{bmatrix} \dot{J}_{T_3 11} & \dot{J}_{T_3 12} & \dot{J}_{T_3 13} \\ \dot{J}_{T_3 21} & \dot{J}_{T_3 22} & \dot{J}_{T_3 23} \\ \dot{J}_{T_3 31} & \dot{J}_{T_3 32} & \dot{J}_{T_3 33} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Trong đó:

$\dot{J}_{T_3 11} = (-\dot{q}_1c_1(2a+l_2c_{23}+2l_1c_2)-s_1(-l_2(\dot{q}_2+\dot{q}_3)s_{23}-2\dot{q}_2l_1s_2))/2$

$\dot{J}_{T_3 12} = (\dot{q}_1c_1(l_2s_{23} + 2l_1s_2)-c_1(l_2(\dot{q}_2+\dot{q}_3)c_{23}+2\dot{q}_2l_1c_2))/2$

$\dot{J}_{T_3 13} = -l_2((\dot{q}_2+\dot{q}_3)c_{23}c_1-\dot{q}_1s_{23}s_1)/2$

$\dot{J}_{T_3 21} = (-\dot{q}_1s_1(2a + l_2c_{23} + 2l_1c2)+c_1(-(\dot{q}_2+\dot{q}_3)l_2s_{23}-2\dot{q}_2l_1s_2))/2$

$\dot{J}_{T_3 22} = -\dot{q}_1c_1(l_2s_{23} + 2l_1s_2)-s_1(l_2(\dot{q}_2+\dot{q}_3)c_{23}+2\dot{q}_2l_1c_2)/2$

$\dot{J}_{T_3 23} = -l_2((\dot{q}_2+\dot{q}_3)c_{23}s_1+\dot{q}_1s_{23}c_1)/2$

$\dot{J}_{T_3 31} = 0$

$\dot{J}_{T_3 32} = -(\dot{q}_2+\dot{q}_3)l_2s_{23}/2 - \dot{q}_2l_1s_2$

$\dot{J}_{T_3 33} = -(\dot{q}_2+\dot{q}_3)l_2s_{23}/2$

Ma trận cosin chỉ hướng của các khâu so với hệ tọa độ cơ sở

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 \\ s_1 & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} c_1c_2 & -c_1s_2 & s_1 \\ s_1c_2 & -s_1s_2 & -c_1 \\ s_2 & c_2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} c_1c_{23} & -c_1s_{23} & s_1 \\ s_1c_{23} & -s_1s_{23} & -c_1 \\ s_{23} & c_{23} & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Toán tử sóng véctơ vân tốc góc của khâu:

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_1 = \dot{\mathbf{A}}_1\mathbf{A}_1^T = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{q}_1 & 0 \\ \dot{q}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \tilde{\boldsymbol{\omega}}_2 = \dot{\mathbf{A}}_2\mathbf{A}_2^T = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{q}_1 & -\dot{q}_2 c_1 \\ \dot{q}_1 & 0 & -\dot{q}_2 s_1 \\ \dot{q}_2 c_1 & \dot{q}_2 s_1 & 0 \end{bmatrix},$$
$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_3 = \dot{\mathbf{A}}_3\mathbf{A}_3^T = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{q}_1 & -c_1(\dot{q}_2 + \dot{q}_3)_1 \\ \dot{q}_1 & 0 & -s_1(\dot{q}_2 + \dot{q}_3 \\ c_1(\dot{q}_2 + \dot{q}_3) & s_1(\dot{q}_2 + \dot{q}_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Từ (5.11) có vận tốc góc của các khâu:

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\omega}_2 = \begin{bmatrix} \dot{q}_2 s_1 \\ -\dot{q}_2 c_1 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\omega}_3 = \begin{bmatrix} s_1(\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\ -c_1(\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Ma trận Jacobi quay và đạo hàm của chúng:

$$\mathbf{J}_{R1} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_1}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};\ \dot{\mathbf{J}}_{R1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\mathbf{J}_{R2} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_2}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \begin{bmatrix} 0 & s_1 & 0 \\ 0 & -c_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};\ \dot{\mathbf{J}}_{R2} = \begin{bmatrix} 0 & \dot{q}_1 c_1 & 0 \\ 0 & \dot{q}_1 s_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\mathbf{J}_{R3} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_3}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \begin{bmatrix} 0 & s_1 & s_1 \\ 0 & -c_1 & -c_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};\ \dot{\mathbf{J}}_{R3} = \begin{bmatrix} 0 & \dot{q}_1 c_1 & \dot{q}_1 c_1 \\ 0 & \dot{q}_1 s_1 & \dot{q}_1 s_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Ma trận tenxơ quán tính có dạng:

$$\mathbf{I}_{C1} = \begin{bmatrix} I_{xx1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz1} \end{bmatrix};$$
$$\mathbf{I}_{C2} = \begin{bmatrix} I_{xx2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz2} \end{bmatrix}; \mathbf{I}_{C3} = \begin{bmatrix} I_{xx3} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy3} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz3} \end{bmatrix} \quad (16)$$

Thay các ma trận Jacobi tịnh tiến và Jacobi quay vào biểu thức:

DO NOT COPY

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^{3} (m_i \mathbf{J}_{Ti}^T \mathbf{J}_{Ti} + \mathbf{J}_{Ri}^T \mathbf{A}_i \mathbf{I}_i \mathbf{A}_i^T \mathbf{J}_{Ri}) \quad (17)$$

Ta nhận được ma trận khối lượng suy rộng **M** của robot:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \quad (18)$$

Trong đó:

$$m_{11} = I_{yy1} + I_{yy3} c_{23}^{\ 2} + I_{xx3} s_{23}^{\ 2} + I_{yy2} c_2^{\ 2} + I_{xx2} s_2^{\ 2} + (m_2 c_1^{\ 2} (2a + l_1 c_2)^2) / 4$$
$$+ (m_2 . s_1^{\ 2} . (2a + l_1 c_2)^2) / 4 + (m_3 c_1^{\ 2} (2a + l_2 c_{23} + 2 l_1 c_2)^2) / 4$$
$$+ (m_3 s_1^{\ 2} (2a + l_2 c_{23} + 2 l_1 c_2)^2) / 4 + a^2 m_1 c_1^{\ 2} + a^2 m_1 * s_1^{\ 2}$$
$$m_{12} = m_{13} = m_{21} = m_{31} = 0$$
$$m_{22} = I_{zz2} + I_{zz3} + l_1^{\ 2} m_2 / 4 + l_1^{\ 2} m_3 + l_2^{\ 2} m_3 / 4 + l_1 l_2 m_3 c_3$$
$$m_{23} = m_3 l_2^{\ 2} / 4 + l_1 m_3 c_3 l_2 / 2 + I_{zz3}$$
$$m_{32} = m_3 l_2^{\ 2} / 4 + l_1 m_3 c_3 l_2 / 2 + I_{zz3}$$
$$m_{33} = m_3 l_2^{\ 2} / 4 + I_{zz3}$$

Động năng của các khâu:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} = \dot{q}_3 (\dot{q}_2 (I_{xx3} + l_2^{\ 2} m_3 / 4 - I_{xx3} c_1^{\ 2} + I_{yy3} c_1^{\ 2} + l_1 l_2 m_3 c_3 / 2) / 2$$
$$+ \dot{q}_3 (I_{yy3} + l_2^{\ 2} m_3 / 4 + I_{xx3} s_1^{\ 2} - I_{yy3} s_1^{\ 2}) / 2 + (\dot{q}_1^{\ 2} (I_{zz1} + I_{zz2} + I_{zz3}$$
$$+ m_2 c_1^{\ 2} (2a + l_1 c_2)^2 / 4 + m_2 s_1^{\ 2} (2a + l_1 c_2)^2 / 4 + m_3 c_1^{\ 2} (2a + l_2 c_{23} + 2 l_1 c_2)^2 / 4 \quad (19)$$
$$+ m_3 s_1^{\ 2} (2a + l_2 c_{23} + 2 l_1 c_2)^2 / 4 + a^2 m_1 c_1^{\ 2} + a^2 m_1 s_1^{\ 2}) / 2 + \dot{q}_2 (\dot{q}_3 (I_{xx3} + l_2^{\ 2} m_3 / 4$$
$$- I_{xx3} c_1^{\ 2} + I_{yy3} c_1^{\ 2} + l_1 l_2 m_3 c_3 / 2) / 2 + (\dot{q}_2 (I_{xx2} + I_{xx3} + l_1^{\ 2} m_2) / 4 + l_1^{\ 2} m_3 + l_2^{\ 2} m_3 / 4$$
$$- I_{xx2} c_1^{\ 2} - I_{xx3} c_1^{\ 2} + I_{yy2} c_1^{\ 2} + I_{yy3} c_1^{\ 2} + l_1 l_2 m_3 c_3) / 2$$

Thế năng của các khâu:

$$\Pi = g m_3 (b + l_2 s_{23} / 2 + l_1 s_2) + b g m_1 / 3 + g m_2 (b + l_1 s_2 / 2) \quad (20)$$

Công ảo của các lực suy rộng không thế:

$$\delta_A = \tau_1 \delta d_1 + \tau_2 \delta q_2 + \tau_3 \delta q_3 \qquad (21)$$

Từ đó, ta có:

$$Q_1^{np} = \tau_1;\ \ Q_2^{np} = \tau_2;\ Q_3^{np} = \tau_3 \qquad (22)$$

Thế các biểu thức trên vào phương trình Lagrange loại hai:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right)^T - \left(\frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}}\right)^T = -\left(\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}}\right)^T + Q_i^{np} \quad (i = 1,2,3) \qquad (23)$$

Ta nhận được hệ phương trình vi phân chuyển động của robot như sau:

$$\tau_1 = I_{zz1}\ddot{q}_1 + I_{zz2}\ddot{q}_1 + I_{zz3}\ddot{q}_1 - I_{xx2}\dot{q}_2^{\,2}2s_1c_1/2 - I_{xx3}\dot{q}_2^{\,2}2s_1c_1/2 - I_{xx3}\dot{q}_3^{\,2}2s_1c_1/2$$
$$+I_{yy2}\dot{q}_2^{\,2}2s_1c_1/2 + I_{yy3}\dot{q}_2^{\,2}2s_1c_1/2 + I_{yy3}\dot{q}_3^{\,2}2s_1c_2/2 + a^2\ddot{q}_1m_1 + a^2\ddot{q}_1m_2 + a^2\ddot{q}_1m_3$$
$$+\ddot{q}_1l_1^2m_2/8 + \ddot{q}_1l_1^2m_3/2 + \ddot{q}_1l_2^2m_3/8 + \ddot{q}_1l_1^2m_2\cos(2q_2)/8 + \ddot{q}_1l_1^2m_3\cos(2q_2)/2$$
$$+\ddot{q}_1l_2^2m_3\cos(2q_2+2q_3)/8 - I_{xx3}\dot{q}_2\dot{q}_32s_1c_1 + I_{yy3}\dot{q}_2\dot{q}_32s_1c_1 + \ddot{q}_1l_1l_2m_3\cos(2q_2+q_3)/2$$
$$+a\ddot{q}_1l_2m_3c_{23} - \dot{q}_1\dot{q}_2l_1^2m_22s_2c_2/4 - \dot{q}_1\dot{q}_2l_1^2m_32s_2c_2 + a\ddot{q}_1l_1m_2c_2 + 2a\ddot{q}_1l_1m_3c_2$$
$$-\dot{q}_1\dot{q}_2l_2^2m_32s_{23}c_{23}/4 - \dot{q}_1\dot{q}_3l_2^2m_32s_{23}c_{23}/4 + \ddot{q}_1l_1l_2m_3c_3/2 - a\dot{q}_1\dot{q}_2l_2m_3s_{23}$$
$$-a\dot{q}_1\dot{q}_3l_2m_3s_{23} - a\dot{q}_1\dot{q}_2l_1m_2s_2 - 2a\dot{q}_1\dot{q}_2l_1m_3s_2 - \dot{q}_1\dot{q}_3l_1l_2m_3s_3/2 - \dot{q}_2\dot{q}_3l_1l_2m_3\sin(2q_2$$
$$+q_3) - \dot{q}_1\dot{q}_3l_1l_2m_3\sin(2q_2+q_3)/2$$

$$\tau_2 = I_{xx2}\ddot{q}_2/2 + I_{xx3}\ddot{q}_2/2 + I_{xx3}\ddot{q}_3/2 + I_{yy2}\ddot{q}2/2 + I_{yy3}\ddot{q}_2/2 + I_{yy3}\ddot{q}_3/2$$
$$-I_{xx2}\ddot{q}_2\cos(2q_1)/2 - I_{xx3}\ddot{q}_2\cos(2q_1)/2 - I_{xx3}\ddot{q}_3\cos(2q_1)/2 + I_{yy2}\ddot{q}_2\cos(2q_1)/2$$
$$+I_{yy3}\ddot{q}_2\cos(2q_1)/2 + I_{yy3}\ddot{q}_3\cos(2q_1)/2 + \ddot{q}_2l_1^2m_2/4 + \ddot{q}_2l_1^2m_3 + \ddot{q}_2l_2^2m_3/4$$
$$+\ddot{q}_3l_2^2m_3/4 + gl_2m_3c_{23}/2 + gl_1m_2c_2/2 + gl_1m_3c_2 + \dot{q}_1^2l_1^2m_22s_2c_2/8$$
$$+\dot{q}_1^2l_1^2m_32s_2c_2/2 + I_{xx2}\dot{q}_1\dot{q}_22s_1c_1 + I_{xx3}\dot{q}_1\dot{q}_22s_1c_1 + I_{xx3}\dot{q}_1\dot{q}_32s_1c_1 - I_{yy2}\dot{q}_1\dot{q}_22s_1c_1$$
$$-I_{yy3}\dot{q}_1\dot{q}_22s_1c_1 - I_{yy3}\dot{q}_1\dot{q}_32s_1d_1 + \dot{q}_1^2l_2^2m_32s_{23}c_{23}/8 + a\dot{q}_1^2l_2m_3s_{23}/2$$
$$+a\dot{q}_1^2l_1m_2s_2/2 + a\dot{q}_1^2l_1m_3s_2 - \dot{q}_3^2l_1l_2m_3s_3/2 + \dot{q}_1^2l_1l_2m_3\sin(2q_2+q_3)/2$$
$$+\ddot{q}_2l_1l_2m_3c_3 + \ddot{q}_3l_1l_2m_3c_3/2 - \dot{q}_2\dot{q}_3l_1l_2m_3s_3$$

DO NOT COPY

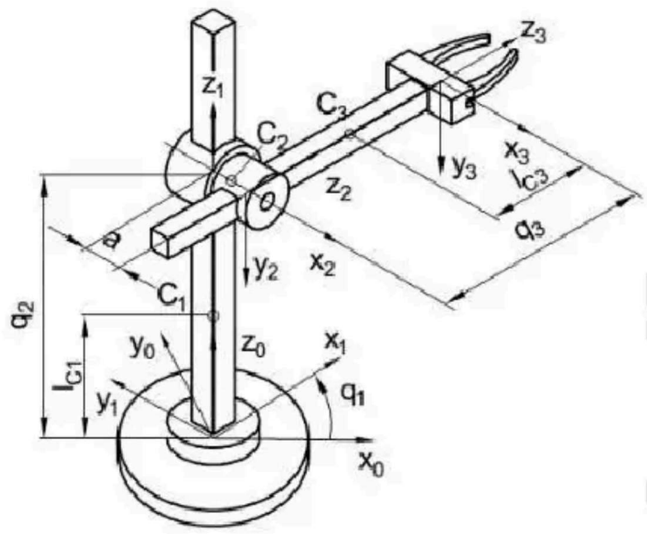
$$\tau_3 = I_{xx3}\ddot{q}_2/2 + I_{xx3}\ddot{q}_3/2 + I_{yy3}\ddot{q}_2/2 + I_{yy3}\ddot{q}_3/2 - I_{xx3}\ddot{q}_2 cos(2q_1)/2$$
$$-I_{xx3}\ddot{q}_3 cos(2q_1)/2 + I_{yy3}\ddot{q}_2 cos(2q_1)/2 + I_{yy3}\ddot{q}_3 cos(2q_1)/2 + \ddot{q}_2 l_2^{\,2} m_3/4$$
$$+\ddot{q}_3 l_2^{\,2} m_3/4 + g l_2 m_3 c_{23}/2 + I_{xx3}\dot{q}_1\dot{q}_2 2 s_1 c_1 + I_{xx3}\dot{q}_1\dot{q}_3 2 s_1 c_1 - I_{yy3}\dot{q}_1\dot{q}_2 2 s_1 c_1$$
$$-I_{yy3}\dot{q}_1\dot{q}_3 2 s_1 c_1 + \dot{q}_1^{\,2} l_2^{\,2} m_3 2 s_{23} c_{23}/8 + a\dot{q}_1^{\,2} l_2 m_3 s_{23}/2 + \dot{q}_1^{\,2} l_1 l_2 m_3 s_3/4$$
$$+\dot{q}_2^{\,2} l_1 l_2 m_3 s_3/2 + \dot{q}_1^{\,2} l_1 l_2 m_3 sin(2q_2 + q_3)/4 + \ddot{q}_2 l_1 l_2 m_3 c_3/2$$

Ví dụ 5.5: Cho robot có kích thước như hình 5.11. Ký hiệu khối tâm của khâu thứ i là C_i. Khối lượng các khâu là m_i (i = 1,…,3), mômen quán tính đối với trục đi qua khối tâm I_i (i = 1,…,3). Hãy thiết lập phương trình vi phân chuyển động của robot sử dụng phương trình Lagrange loại hai.

Lời giải:

Bảng 5.6. Tham số động lực học của robot

Khâu	Tọa độ khối tâm địa phương			Khối lượng	Ma trận momen quán tính I(kg.mm^2)					
	x_c	y_c	z_c		I_{xx}	I_{yy}	I_{zz}	I_{xy}	I_{yz}	I_{zx}
1	0	0	l_{C1}	m_1	I_{xx1}	I_{yy1}	I_{zz1}	0	0	0
2	-a/2	0	0	m_2	I_{xx2}	I_{yy2}	I_{zz2}	0	0	0
3	0	0	$-l_{C3}$	m_3	I_{xx3}	I_{yy3}	I_{zz3}	0	0	0



Hình 5.11. Robot

Theo kết quả ví dụ 3.1 có được ma trận chuyển trong hệ tọa độ địa phương là $\mathbf{H}_{01}$, $\mathbf{H}_{12}$, $\mathbf{H}_{23}$ và ma trận chuyển trong hệ tọa độ toàn cục là $\mathbf{H}_{0i}$ *(i = 1,2,3)*

$$\mathbf{H}_{0i} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i & \mathbf{r}_i^{(0)} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, (i = 1,2,3) \qquad (1)$$

Ở đây:

$\mathbf{A}_i$ – ma trận cosin chỉ hướng của các khâu trong hệ tọa độ cố định

$\mathbf{r}_i^{(0)}$ - vị trí các khâu trong hệ tọa độ cố định

Tọa độ khối tâm của các khâu trong hệ quy chiếu gắn liền với khâu có dạng:

$$\mathbf{u}_{Ci}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_{C1} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_{C2}^{(2)} = \begin{bmatrix} -a/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_{C3}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -l_{C3} \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

Tọa độ trọng tâm các khâu trong hệ quy chiếu cố định được tính theo công thức sau:

$$ {}^{in}\mathbf{r}_{C_i} = \mathbf{H}_{0i}\mathbf{u}_{C_i}^{(i)} \qquad (3) $$

Từ (3) ta suy ra:

$$ \mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_{C1} \end{bmatrix};\ \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} l_{C2}c_1 \\ l_{C2}s_1 \\ q_2 \end{bmatrix};\ \mathbf{r}_3 = \begin{bmatrix} (l_{C3} - 2q_3)s_1 \\ -(l_{C3} - 2q_3)c_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \qquad (4) $$

Ma trận Jacobi tịnh tiến của các khâu có dạng:

$$ \mathbf{J}_{T1} = \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_{T2} = \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -l_{C2}s_1 & 0 & 0 \\ l_{C2}c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} $$

$$ \mathbf{J}_{T3} = \frac{\partial \mathbf{r}_3}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} (l_{C3} - 2q_3)c_1 & 0 & -2s_1 \\ (l_{C3} - 2q_3)s_1 & 0 & 2c_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (5) $$

Toán tử sóng véctơ vân tốc góc của khâu:

$$ \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i^{(0)} = \dot{\mathbf{A}}_i \mathbf{A}_i^T \ , (i = 1,2,3) \qquad (6) $$

Từ (5.209) xác định được vận tốc góc của các khâu so với hệ trục tọa độ cố định:

$$ \boldsymbol{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{\omega}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix} \qquad (7) $$

Từ vận tốc góc các khâu, ta xác định các ma trận Jacobi quay:

$$\mathbf{J}_{R1}=\frac{\partial\boldsymbol{\omega}_1}{\partial\mathbf{q}}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix},\mathbf{J}_{R2}=\frac{\partial\boldsymbol{\omega}_2}{\partial\mathbf{q}}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix},$$
$$\mathbf{J}_{R3}=\frac{\partial\boldsymbol{\omega}_3}{\partial\mathbf{q}}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix} \quad (8)$$

Tính ma trận khối lượng suy rộng của robot:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})=\sum_{i=1}^{3}(\mathrm{m}_i\mathbf{J}_{T_i}^T\mathbf{J}_{T_i}+\mathbf{J}_{R_i}^T\mathbf{A}_i\mathbf{I}_i\mathbf{A}_i^T\mathbf{J}_{Ri})=\begin{bmatrix}\mathrm{m}_{11}&\mathrm{m}_{12}&\mathrm{m}_{13}\\\mathrm{m}_{21}&\mathrm{m}_{22}&\mathrm{m}_{23}\\\mathrm{m}_{31}&\mathrm{m}_{32}&\mathrm{m}_{33}\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}m_2l_{C2}^2+m_3l_{C3}^2-4m_3l_{C3}q_3+4m_3q_3^2+I_{z1}+I_{z2}+I_{z3}&0&0\\0&m_2+m_3&0\\0&0&4m_3\end{bmatrix} \quad (9)$$

Động năng của hệ:

$$\mathbf{T}=\frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}=\frac{m_2+m_3}{2}\ddot{q}_2+2m_3\ddot{q}_3$$
$$+\frac{\dot{q}_1\left(m_2l_{C2}^2+m_3l_{C3}^2-4m_3l_{C3}q_3+4m_3q_3^2+I_{z1}+I_{z2}+I_{z3}\right)}{2} \quad (10)$$

Thế năng của hệ:

$$\prod=m_1gl_{C1}+m_2gq_2+m_3gq_2 \quad (11)$$

Công ảo của các lực không thế:

$$\partial\mathrm{A}=\tau_1\partial\mathrm{q}_1+\mathrm{F}_2\partial\mathrm{q}_2+\mathrm{F}_3\partial\mathrm{q}_3 \quad (12)$$

(Đây là bài toán chỉ xét đến cấu trúc của tay máy, chưa xét đến khối lượng vật nâng nên sẽ không có lực ở điểm cuối tay máy=> di chuyển ảo bằng không)

Các lực suy rộng ứng với các lực không thế:

DO NOT COPY

$$Q_1^{np} = \tau_1;\ Q_2^{np} = F_2;\ Q_3^{np} = F_3 \qquad (13)$$

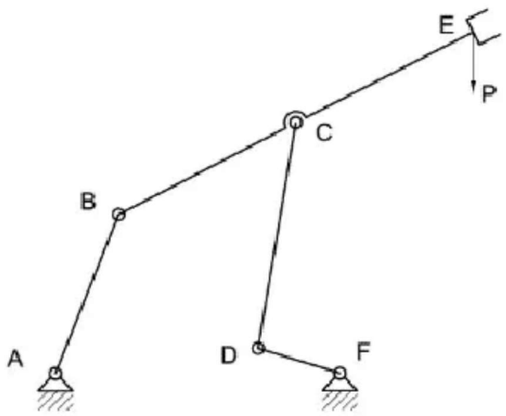
Thay các giá trị vào phương trình Lagrange loại II:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right) = \frac{-\partial \Pi}{\partial q_i} + Q_i^{np} \qquad (14)$$

Từ đó, ta xác định được các phương trình vi phân chuyển động của tay máy:

$$\begin{cases} \tau_1 = \ddot{q}_1(m_2 l_{C2}^2 + m_3 l_{C3}^2 - 4m_3 l_{C3} q_3 + 4m_3 q_3^2 \\ +I_{z1} + I_{z2} + I_{z3}) - 4m_3(l_{C3} - 2q_3)\dot{q}_1\dot{q}_3 \\ F_2 = (m_2 + m_3)(g + \ddot{q}_2) \\ F_3 = 4m_3\ddot{q}_3 + \dfrac{\dot{q}_1^2(4m_3 l_{C3} - 8m_3 q_3)}{2} \end{cases} \qquad (15)$$

Ví dụ 5.6: Cho robot như hình 5.11. Biết AB = L_1, BC = L_2, CE = L'_2, AD = L_0, FD = L_3 và DC = L_4. Khối lượng các khâu là m_i (i = 1,…,5). Hãy thiết lập phương trình vi phân chuyển động của robot bằng phương pháp Lagrange II



Hình 5.12. Cấu trúc robot

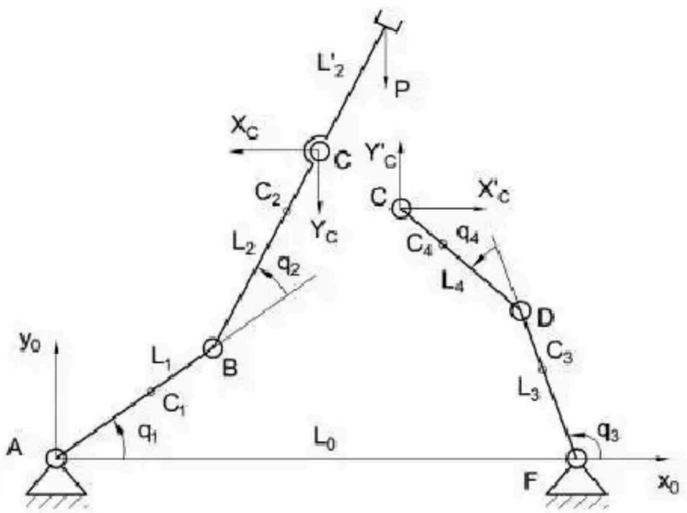
Lời giải:

Giải phóng liên kết tại khớp C ta phân cơ cấu thành các hệ con chịu lực như trên hình 5.13.

Robot có cấu trúc mạch vòng, vị trí các khâu của robot được bằng các tọa độ suy rộng:

$$\mathbf{q} = [\mathbf{q}^{(1)}\ \mathbf{q}^{(2)}]^T = [q_1\ q_2\ q_3\ q_4)]^T \qquad (1)$$

Ở đây $a_1 = AC_1$, $a_2 = BC_2$, $a_3 = FC_3$, $a_4 = DC_4$ với C_1, C_2 , C_3, C_4 lần lượt là vị trí khối tấm khâu AB, BE, FD và DC



Hình 5.13. Cấu trúc động học của robot

Nhánh bên trái:

Chọn tọa độ suy rộng gắn với nhánh bên trái:

$$\mathbf{q}^{(1)} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix}^T \qquad (2)$$

Vị trí khối tâm và biểu thức vận tốc góc của các khâu.

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} a_1 c_1 \\ a_2 s_1 \\ 0 \end{bmatrix};\ \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} L_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ L_1 s_1 + a_2 s_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Từ đó tính ra các ma trận Jacobian tịnh tiến và quay:

$$\mathbf{J}_{T1} = \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 & 0 \\ a_1 c_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \; \mathbf{J}_{R1} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_1}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$\mathbf{J}_{T2} = \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -a_2 s_{12} - L_1 s_1 & -a_2 s_{12} \\ a_2 c_{12} + L_1 c_1 & a_2 c_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{J}_{R2} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_2}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Ma trận tenxo quán tính khối lượng các khâu có dạng:

$$\mathbf{I}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{1y} & 0 \\ 0 & 0 & I_{1z} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{2y} & 0 \\ 0 & 0 & I_{2z} \end{bmatrix} \tag{7}$$

Theo định nghĩa ma trận khối lượng suy rộng của nhánh bên trái của robot có dạng:

$$\mathbf{M}_T = \sum_{i=1}^{2} (\mathrm{m}_i \mathbf{J}_{Ti}^T \mathbf{J}_{Ti} + \mathbf{J}_{Ri}^T \mathbf{I}_i \mathbf{J}_{Ri}) = \begin{bmatrix} m_{T11} & m_{T12} \\ m_{T21} & m_{T22} \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$m_{T11} = m_2.L_1^2 + 2.m_2.c_2.L_1.a_2 + m_1.a_1^2 + m_2.a_2^2 + I_{1z} + I_{2z}$$

Với: $m_{T22} = m_2.a_2^2 + I_{2z}$

$$m_{T12} = m_2.a_2^2 + L_1.m_2.c_2.a_2 + I_{2z}$$

Động năng của hệ:

$$\mathbf{T}_1 = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}_T(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \left(m_{T11} \dot{q}_1^2 + 2 m_{T12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + m_{T22} \dot{q}_2^2 \right) \tag{9}$$

Thế năng của cơ hệ:

$$\Pi_1 = m_1 \mathrm{g}.a_1 s_1 + m_2 \mathrm{g}(a_2 s_{12} + L_1 s_1) \tag{10}$$

Công ảo của các lực suy rộng không thế:

$$\delta A_1 = \tau_1 \delta q_1 - Y_c \delta y_c - X_c \delta x_c - P \delta y_E \qquad (11)$$

Từ hệ thức:

$$\begin{aligned} x_E &= L_1.\mathrm{c}_1 + (\mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_2^{'}).\mathrm{c}_{12} \\ y_E &= L_1.\mathrm{s}_1 + (\mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_2^{'}).\mathrm{s}_{12} \\ x_C &= L_1.\mathrm{c}_1 + \mathrm{L}_2.\mathrm{c}_{12} \\ y_C &= L_1.\mathrm{s}_1 + \mathrm{L}_2.\mathrm{s}_{12} \end{aligned} \qquad (12)$$

Suy ra:

$$\begin{aligned} \delta y_E &= \left[L_1 c_1 + (L_2 + L_3).\mathrm{c}_{12}\right].\delta q_1 + \left[(L_2 + L_3)\mathrm{c}_{12}\right]\delta q_2 \\ \delta x_C &= \left[-L_1 s_1 - L_2.\mathrm{s}_{12}\right].\delta q_1 - L_2 s_{12}.\delta q_2 \\ \delta y_C &= \left[L_1 c_1 + L_2.\mathrm{c}_{12}\right].\delta q_1 + L_2\,\mathrm{c}_{12}.\delta q_2 \end{aligned} \qquad (13)$$

Thế vào biểu thức tính công ảo ta được:

$$\begin{aligned} \mathrm{Q}_1 &= \tau_1 + \mathrm{X}_c.(L_1.\mathrm{s}_1 + L_2.\mathrm{s}_{12}) - \mathrm{Y}_c.(L_1.\mathrm{c}_1 + L_2.\mathrm{c}_{12}) - \mathrm{P}.(L_1\mathrm{c}_1 + (L_2 + \mathrm{L}_2^{'}).\mathrm{c}_{12}) \\ \mathrm{Q}_2 &= \mathrm{X}_c.L_2.\mathrm{s}_{12} - \mathrm{Y}_c.L_2\mathrm{c}_{12} - \mathrm{P}.(L_2 + \mathrm{L}_2^{'}).\mathrm{c}_{12} \end{aligned} \qquad (14)$$

Thế các biểu thức động năng, thế năng và các lực suy rộng không thế vào phương trình Lagrange loại hai:

$$\frac{d}{dT_1}\left(\frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_i}\right) - \left(\frac{\partial T_1}{\partial q_k}\right) = -\left(\frac{\partial \Pi_1}{\partial q_k}\right)(k = 1,2) \qquad (15)$$

Phương trình vi phân chuyển động của nhánh bên phải:

Chọn tọa độ suy rộng ứng với nhánh bên phải như sau:

$$\mathbf{q}^{(2)} = \begin{bmatrix} q_3 & q_4 \end{bmatrix}^T \qquad (16)$$

Ta tính được vị trí khối tâm và biểu thức vận tốc góc của các khâu.

DO NOT COPY

$$\mathbf{r}_3 = \begin{bmatrix} L_0 + a_3 c_3 \\ a_3 s_3 \\ 0 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{r}_4 = \begin{bmatrix} L_0 + L_3 c_3 + a_4 c_{34} \\ L_3 \mathrm{s}_3 + a_4 s_{34} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{17}$$

$$\boldsymbol{\omega}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}; \qquad \boldsymbol{\omega}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_3 + \dot{q}_4 \end{bmatrix} \tag{18}$$

Từ đó tính ra các ma trận Jacobian tịnh tiến và quay:

$$\mathbf{J}_{T3} = \frac{\partial \mathbf{r}_3}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -a_3 s_3 & 0 \\ a_3 c_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{J}_{R3} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_3}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{19}$$

$$\mathbf{J}_{T4} = \frac{\partial \mathbf{r}_4}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -a_4 s_{34} - L_3 s_3 & -a_4 s_{34} \\ a_4 c_{34} + L_3 c_3 & a_4 c_{34} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{J}_{R4} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_4}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{20}$$

Ma trận tenxơ quán tính khối lượng khâu có dạng:

$$\mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{3y} & 0 \\ 0 & 0 & I_{3z} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{I}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{4y} & 0 \\ 0 & 0 & I_{4z} \end{bmatrix} \tag{21}$$

Ma trận khối lượng suy rộng của cấu trúc con 2 khâu có dạng:

$$\mathbf{M}_p = \sum_{i=3}^{4} (\mathrm{m}_i \mathbf{J}_{Ti}^T \mathbf{J}_{Ti} + \mathbf{J}_{Ri}^T \mathbf{I}_i \mathbf{J}_{Ri}) = \begin{bmatrix} m_{p11} & m_{p12} \\ m_{p21} & m_{p22} \end{bmatrix} \tag{22}$$

Với

$$m_{p11} = m_4 L_3^2 + 2 m_4 c_4 L_3 a_4 + m_4 a_4^2 + m_3 a_3^2 + I_{4z} + I_{3z}$$
$$m_{p22} = m_4 a_4^2 + I_{4z}$$
$$m_{p12} = m_4 a_4^2 + L_3 m_4 c_4 a_4 + I_{4z}$$

Động năng của hệ:

$$T_2 = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}_p(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}\left(m_{p11}\dot{q}_3^2 + 2m_{p12}\dot{q}_3\dot{q}_4 + m_{p22}\dot{q}_4^2\right) \quad (23)$$

Thế năng của cơ hệ:

$$\Pi_2 = m_3 g a_3 s_3 + m_4 g(a_4 s_{34} + L_3 s_3) \quad (24)$$

Công ảo của các lực suy rộng không thế:

$$\delta A_2 = m m_2 \delta q_3 + Y_c' \delta y_c + X_c' \delta x_c \quad (25)$$

Ta có:

$$\begin{aligned} x_C &= L_0 + L_3.\mathrm{c}_3 + \mathrm{L}_4.\mathrm{c}_{34} \\ y_C &= \quad L_3.\mathrm{s}_3 + \mathrm{L}_4.\mathrm{s}_{34} \end{aligned} \quad (26)$$

Suy ra:

$$\begin{aligned} \delta x_C &= \left[-L_3 s_3 - \mathrm{L}_4 s_{34}\right]\delta q_3 - \mathrm{L}_4 s_{34}\delta q_4 \\ \delta y_C &= \left[L_3 c_3 + \mathrm{L}_4 c_{34}\right]\delta q_3 + \mathrm{L}_4 \mathrm{c}_{34}\delta q_4 \end{aligned} \quad (27)$$

Thế vào biểu thức tính công ảo ta được:

$$\begin{aligned} \mathrm{Q}_3 &= \tau_2 - \mathrm{X}_c'(L_4 s_{34} + L_3 s_3) + \mathrm{Y}_c'(L_4 c_{34} + L_3 c_3) \\ \mathrm{Q}_4 &= -\mathrm{X}_c' L_4 s_{34} + \mathrm{Y}_c' L_4 c_{34} \end{aligned} \quad (28)$$

Thế các biểu thức động năng, thế năng và các lực suy rộng không thế vào phương trình Lagrange loại hai, được phương trình vi phân chuyển động của nhánh bên phải.

5.6. GIỚI THIỆU CÁC PHƯƠNG TRÌNH KHÁC CỦA HỆ NHIỀU VẬT

5.6.1. Các phương trình Kane của hệ nhiều vật

Các phương trình Kane tuy mới được thiết lập vào những năm 60 của thế kỹ 20, nhưng sớm có một vị trí nghiên cứu động lực học hệ nhiều vật. Trong phần này, trước hết giới thiệu các khái niệm vận tốc riêng của điểm và vận tốc góc riêng của vật rắn, sau đó trình bày biểu thức tính lực hoạt động suy rộng và lực quán tính suy rộng. Trên cơ sở các khái niệm đó thiết

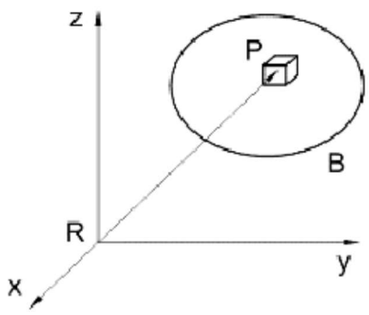
DO NOT COPY

lập các phương trình động lực Kane cho hệ p vật rắn. Lúc đầu Thmos R.Kane, giáo sư Trường Đại học Stanford (Hoa Kỳ), gọi phương trình mà ông thiết lập là dạng Lagrange của nguyên lý d'Alembert. Sau này người ta lấy trên ông đặt tên cho phương trình này.

a) Các vận tốc riêng của điểm và các vận tốc góc riêng của vật rắn

** Các vận tốc riêng của điểm (Partical velocities of points)*

Xét một hệ gồm p vật rắn tùy ý. Giả sử vị trí của hệ được xác định bởi m tọa độ suy rộng $q_1, q_2, ..., q_m$. Nói chung m lớn hơn số bậc tự do của hệ. Giả sử P là một điểm bất kỳ thuộc vật rắn B của hệ (hình 5.14). Vị trí của điểm P được xác định bởi véctơ định vị $\vec{r}^P$ $\vec{r}^p$



Hình 5.14. Vật rắn không gian

$$\vec{r}^P = \vec{r}^P(t, q_1, q_2, ..., q_m) \quad (i = 1, ..., m) \tag{5.135}$$

Đạo hàm theo thời gian véctơ $\vec{r}^P$ ở trong hệ quy chiếu R ta được:

$${}^R\vec{v}^P = \frac{{}^R d\vec{r}^P}{dt} = \frac{{}^R \partial \vec{r}^P}{\partial t} + \sum_{k=1}^{m} \frac{{}^R \partial \vec{r}^P}{\partial q_k} \dot{q}_k \tag{5.136}$$

Để cho gọn ta kí hiệu ${}^R\vec{v}^P = \vec{v}^P$, ${}^R\vec{a}^P = \vec{a}^P$. Bây giờ ta đưa vào các ký hiệu mới

$$\vec{v}^P = \frac{{}^R \partial \vec{r}^P}{\partial t}, \; \vec{v}_{q_k}^P = \frac{{}^R \partial \vec{r}^P}{\partial q_k} \; (k = 1, ..., m) \tag{5.137}$$

Với kí hiệu trên, biểu thức (5.136) có thể viết lại dưới dạng:

$$\vec{v}^P = \vec{v}_t^P + \sum_{k=1}^{m} \vec{v}_{\dot{q}_k}^P \dot{q}_k \qquad (5.138)$$

Định nghĩa 5.1: Véctơ $\vec{v}_t^P$ được gọi là vận tốc riêng theo biến t của điểm P trong hệ quy chiếu R. Véctơ $\vec{v}_{\dot{q}_k}^P$ $(k = 1,...,m)$ được gọi là véctơ vận tốc riêng theo biến q_k của điểm P trong hệ quy chiếu R.

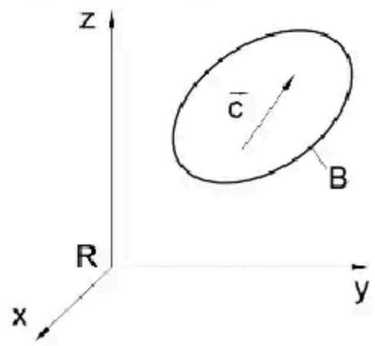
Phương trình (5.136) biểu diễn sự phụ thuộc tuyến tính của vận tốc ${}^R\vec{v}^P$ vào vận tốc suy rộng $\dot{q}_k$. Tư phương trình này ta dễ dàng suy ra biểu thức:

$$\vec{v}_{\dot{q}_k}^P = \frac{{}^R\partial \vec{v}^P}{\partial \dot{q}_k} = \frac{{}^R\partial \vec{r}^P}{\partial q_k} \qquad (5.139)$$

** Các vận tốc góc riêng của vật rắn (Partial angular velocities of bodies)*

Giả sử B là một vật rắn bất kì của một hệ nhiều vật. Lấy $\vec{c}$ là một véctơ tùy ý của vật rắn B (hình 5.15). Véctơ $\vec{c}$ là hàm của các tọa độ suy rộng $q_1, q_2, ..., q_m$ và t.

$$\vec{c} = \vec{c}(q_1, q_2, ..., \mathrm{q}_m) \qquad (5.140)$$



Hình 5.15. Véctơ $\vec{c}$ thuộc vật rắn B

Theo định nghĩa vận tốc góc của vật rắn, ta có:

$$\frac{{}^R d\vec{c}}{dt} = {}^R\vec{\omega}^B \times \vec{c} \qquad (5.141)$$

DO NOT COPY

Đạo hàm véctơ $\vec{c}$ theo thời gian *t* trong hệ quy chiếu R, ta được:

$$\frac{{}^{R}d\vec{c}}{dt} = \frac{{}^{R}\partial\vec{c}}{\partial t} + \sum_{k=1}^{m}\frac{{}^{R}\partial\vec{c}}{\partial q_k}\dot{q}_k = {}^{R}\vec{\omega}^{B}x\vec{c} \qquad (5.142)$$

Bây giờ ta đưa vào các ký hiệu:

$$\frac{{}^{R}\partial\vec{c}}{\partial t} = {}^{R}\dot{\omega}_t^{B}\,\mathrm{x}\,\vec{c}, \frac{{}^{R}\partial\vec{c}}{\partial q_k} = {}^{R}\dot{\omega}_{q_k}^{B}\,\mathrm{x}\,\vec{c} \qquad (5.143)$$

Thay các biểu thức (5.143) vào phương trình (5.142) ta được:

$$\frac{{}^{R}d\vec{c}}{dt} = {}^{R}\vec{\omega}^{B}\times\vec{c} = {}^{R}\vec{\omega}_t^{B}\times\vec{c} + \sum_{k=1}^{m}({}^{R}\vec{\omega}_{q_k}^{B}\times\vec{c})\dot{q}_k = \left({}^{R}\vec{\omega}_t^{B} + \sum_{k=1}^{m}{}^{R}\vec{\omega}_{q_k}^{B}\dot{q}_k\right)\times\vec{c} \qquad (5.144)$$

Do $\vec{c}$ là một véctơ tùy ý khác không của vật rắn B và do phương trình (0.144*)* đúng với mọt véctơ, nên ta có hệ thức:

$${}^{R}\vec{\omega}^{B} = {}^{R}\vec{\omega}_t^{B} + \sum_{k=1}^{m}{}^{R}\vec{\omega}_{q_k}^{B}\dot{q}_k \qquad (5.145)$$

Theo hệ thức (5.145) ta có:

$$\frac{\partial\,{}^{R}\vec{\omega}^{B}}{\partial\dot{q}_k} = {}^{R}\vec{\omega}_{q_k}^{B} \qquad (5.146)$$

Định nghĩa 5.2: Véctơ ${}^{R}\vec{\omega}_t^{B}$ được gọi là vận tốc góc riêng theo biến *t* của vật rắn B trong hệ quy chiếu R. Véctơ ${}^{R}\vec{\omega}_{q_k}^{B}$ được gọi là véctơ vận tốc góc riêng theo biến q_k của vật rắn B trong hệ quy chiếu R.

Ta có các công thức sau:

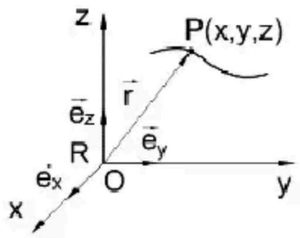
$${}^{R_0}\vec{\omega}_t^{B} = \vec{e}_1^{(1)}\left(\frac{{}^{R_0}\partial\vec{e}_2^{(1)}}{\partial t}.\vec{e}_3^{(1)}\right) + \vec{e}_2^{(1)}\left(\frac{{}^{R_0}\partial\vec{e}_3^{(1)}}{\partial t}.\vec{e}_1^{(1)}\right) + \vec{e}_3^{(1)}\left(\frac{{}^{R_0}\partial\vec{e}_1^{(1)}}{\partial t}.\vec{e}_2^{(1)}\right) \qquad (5.147)$$

$${}^{R_0}\vec{\omega}_{q_k}^{B} = \vec{e}_1^{(1)}\left(\frac{{}^{R_0}\partial\vec{e}_2^{(1)}}{\partial q_k}.\vec{e}_3^{(1)}\right) + \vec{e}_2^{(1)}\left(\frac{{}^{R_0}\partial\vec{e}_3^{(1)}}{\partial q_k}.\vec{e}_1^{(1)}\right) + \vec{e}_3^{(1)}\left(\frac{{}^{R_0}\partial\vec{e}_1^{(1)}}{\partial q_k}.\vec{e}_2^{(1)}\right) \qquad (5.148)$$

** Các thí dụ áp dụng*

Thí dụ 5.7: Cho một điểm P chuyển động trong không gian ba chiều. Hãy tìm các vận tốc riêng của điểm P theo các tọa độ Descartes vuông góc.

Lời giải: Từ hình 5.16 ta có



Hình 5.16: Chất điểm P

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \qquad (1)$$

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z \qquad (2)$$

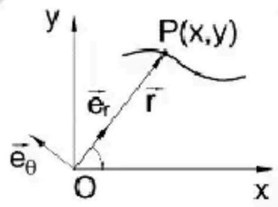
Trong thí dụ này ta sử dụng ký hiệu $q_1 = x, q_2 = y, q_3 = z$

Theo công thức (0.137), từ (1) ta suy ra:

$$\dot{v}_t = 0, \dot{v}_{\dot{x}} = \dot{e}_x, \dot{v}_{\dot{y}} = \dot{e}_y, \dot{v}_{\dot{z}} = \dot{e}_z \qquad (3)$$

Trong thí dụ này các véctơ vận tốc riêng theo các biến *x, y, z* là các véctơ đơn vị trên các trục của hệ tọa độ vuông góc.

Thí dụ 5.8: Cho một điểm P chuyển động trên mặt phẳng. Hãy tìm các vận tốc riêng của điểm P trong hệ tọa độ cực.



Hình 5.17: Tọa độ cực

Lời giải: Từ hình 5.17 ta có

$$\vec{r} = r\vec{e}_r \qquad (1)$$

Đạo hàm biểu thức (1) theo t ở trong hệ tọa độ cố định ta được

DO NOT COPY

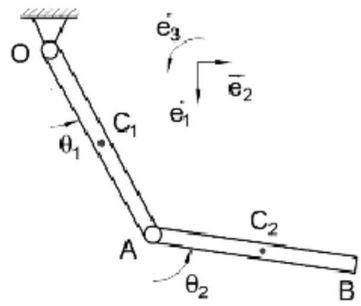
$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \qquad (2)$$

So sánh (2) với (0.136) ta có:

$$\vec{v}_t = 0, \vec{v}_{\dot{r}} = \vec{e}_r, \vec{v}_{\dot{\theta}} = r\vec{e}_r \qquad (3)$$

Trong trường hợp này véctơ vận tốc riêng $\vec{v}_r$ là véctơ đơn vị $\vec{e}_r$, còn véctơ vận tốc riêng $\vec{v}_{\dot{\theta}}$ không phải là véctơ đơn vị $\vec{v}_{\dot{\theta}}$ và có thứ nguyên khác với thứ nguyên của $\vec{v}_\theta$.

Tương tự ta có thể tính toán cho bài toán con lắc kép (Hình 5.18)



Hình 5.18: Con lắc kép

**** Hình chiếu của các véctơ vận tốc riêng của điểm trên các trục tọa độ***

Theo công thức (5.138), vận tốc góc của điểm P có dạng

$$\vec{v}^P = \vec{v}_t^P + \sum_{k=1}^{m} \vec{v}_{\dot{q}_k}^P \dot{q}_k \qquad (5.149)$$

Xét chuyển động của vật rắn B ở trong hệ quy chiếu $R\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ (hình 5.18). Khi đó ta có thể chiếu các véctơ $\vec{v}_t^P$, $\vec{v}_{\dot{q}_k}^P$ lên các trục của hệ tọa độ này

$$\vec{v}_t^P = v_{t1}^P \vec{e}_1 + v_{t2}^P \vec{e}_2 + v_{t3}^P \vec{e}_3 \qquad (5.150)$$

$$\vec{v}_{\dot{q}_k}^P = v_{\dot{q}_k 1}^P \vec{e}_1 + v_{\dot{q}_k 2}^P \vec{e}_2 + v_{\dot{q}_k 3}^P \vec{e}_3 \qquad (5.151)$$

Trong đó $\vec{v}_{ti}^P$ là hình chiếu của véctơ riêng $\vec{v}_t^P$ lên trục $\vec{e}_i$, còn $\vec{v}_{\dot{q}_k i}^P$ là hình chiếu của véctơ riêng $\vec{v}_{\dot{q}_k}^P$ lên trục $\vec{e}_i$.

Thế các biểu thức (0.150), (0.151) vào phương trình (0.149) ta được:

$$\vec{v}^P = \left(v_{t1}^P + \sum_{k=1}^{m} v_{q_k 1}^P \dot{q}_k \right)\vec{e}_1 + \left(v_{t2}^P + \sum_{k=1}^{m} v_{q_k 2}^P \dot{q}_k \right)\vec{e}_2 + \left(v_{t3}^P + \sum_{k=1}^{m} v_{q_k 3}^P \dot{q}_k \right)\vec{e}_3 \qquad (5.152)$$

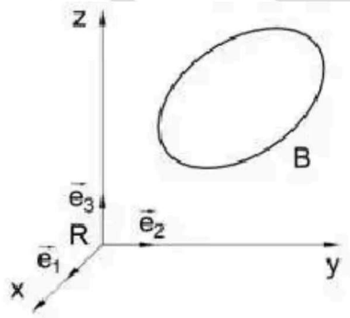
Để đơn giản ta xét trường hợp cơ hệ chịu liên kết dừng, $\vec{r}^P = \vec{r}^P(q_1,...,q_f)$ phương trình (0.152) có dạng:

$$\vec{v}^P = \left(\sum_{k=1}^{m} v_{q_k 1}^P \dot{q}_k \right)\vec{e}_1 + \left(\sum_{k=1}^{m} v_{q_k 2}^P \dot{q}_k \right)\vec{e}_2 + \left(\sum_{k=1}^{m} v_{q_k 3}^P \dot{q}_k \right)\vec{e}_3 \qquad (5.153)$$

Đạo hàm biểu thức (0.153) theo thời gian ở trong hệ quy chiếu R ta được véctơ gia tốc của điểm P

$$\vec{a}^P = \sum_{k=1}^{m} (v_{q_k 1}^P \ddot{q}_k + \dot{v}_{q_k 1}^P \dot{q}_k)\vec{e}_1 + \sum_{k=1}^{m} (v_{q_k 2}^P \ddot{q}_k + \dot{v}_{q_k 2}^P \dot{q}_k)\vec{e}_2 + \sum_{k=1}^{m} (v_{q_k 3}^P \ddot{q}_k + \dot{v}_{q_k 3}^P \dot{q}_k)\vec{e}_3 \qquad (5.154)$$

** Hình chiếu của véctơ vận tốc góc riêng của vật rắn trên các trục tọa độ*



Hình 5.19: Vật rắn không gian

Theo công thức (5.146), biểu thức vận tốc góc của vật rắn có dạng

$${}^R\vec{\omega}^B = {}^R\vec{\omega}_t^B + \sum_{k=1}^{m} {}^R\vec{\omega}_{q_k}^B \dot{q}_k \qquad (5.155)$$

Trong hệ quy chiếu $R = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ các véctơ vận tốc góc riêng ${}^R\vec{\omega}_t^B$, ${}^R\vec{\omega}_{q_k}^B$ $(k = 1,...,m)$ của vật rắn B có thể biểu diễn dưới dạng

$${}^R\vec{\omega}_t^B = {}^R\omega_{t1}^B\vec{e}_1 + {}^R\omega_{t2}^B\vec{e}_2 + {}^R\omega_{t3}^B\vec{e}_3 \qquad (5.156)$$

$$ {}^R\vec{\omega}^B_{q_k} = {}^R\omega^B_{q_k 1}\vec{e}_1 + {}^R\omega^B_{q_k 2}\vec{e}_2 + {}^R\omega^B_{q_k 3}\vec{e}_3 \qquad (5.157) $$

Trong đó ${}^R\omega^B_{ti}$ là hình chiếu của vận tốc góc riêng ${}^R\vec{\omega}^B_t$ trên các trục tọa độ, còn ${}^R\omega^B_{q_k i}$ $(i=1,2,3)$ là hình chiếu của vận tốc góc riêng ${}^R\vec{\omega}^B_{q_k}$ trên các trục tọa độ.

Thế các biểu (0.156), (0.157) vào biểu thức (5.146) ta được

$$ {}^R\vec{\omega}^B = \left({}^R\omega^B_{t1} + \sum_{k=1}^{m} {}^R\omega^B_{q_k 1}\dot{q}_k\right)\vec{e}_1 + \left({}^R\omega^B_{t2} + \sum_{k=1}^{m} {}^R\omega^B_{q_k 2}\dot{q}_k\right)\vec{e}_2 + \left({}^R\omega^B_{t3} + \sum_{k=1}^{m} {}^R\omega^B_{q_k 3}\dot{q}_k\right)\vec{e}_3 \qquad (5.158) $$

Trong trường hợp cơ hệ chịu các liên kết dừng, biểu thức (0.158) có dạng

$$ {}^R\vec{\omega}^B = \left(\sum_{k=1}^{m} {}^R\omega^B_{q_k 1}\dot{q}_k\right)\vec{e}_1 + \left(\sum_{k=1}^{m} {}^R\omega^B_{q_k 2}\dot{q}_k\right)\vec{e}_2 + \left(\sum_{k=1}^{m} {}^R\omega^B_{q_k 3}\dot{q}_k\right)\vec{e}_3 \qquad (5.159) $$

Đạo hàm theo thời gian ở trong hệ quy chiếu R biểu thức (5.159) ta nhận được véctơ gia tốc góc của vật rắn B

$$ {}^R\vec{\alpha}^B = \sum_{k=1}^{m}\left({}^R\omega^B_{q_k 1}\ddot{q}_k + {}^R\dot{\omega}^B_{q_k 1}\dot{q}_k\right)\vec{e}_1 + \sum_{k=1}^{m}\left({}^R\omega^B_{q_k 2}\ddot{q}_k + {}^R\dot{\omega}^B_{q_k 2}\dot{q}_k\right)\vec{e}_2 + \sum_{k=1}^{m}\left({}^R\omega^B_{q_k 3}\ddot{q}_k + {}^R\dot{\omega}^B_{q_k 3}\dot{q}_k\right)\vec{e}_3 \qquad (5.160) $$

b) Lực hoạt động suy rộng và lực quán tính suy rộng

** Lực hoạt động suy rộng của hệ các vật rắn*

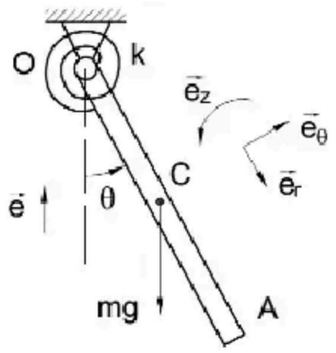
Thu gọn các lực hoạt động tác dụng lên vật rắn B_k về khối tâm C_k của nó ta được một lực $\vec{F}^a_k$ và một ngẫu lực $\vec{M}^a_k$.

Định nghĩa 5.3: Lực hoạt động suy rộng của hệ p vật rắn ứng với tọa độ suy rộng của q_i được định nghĩa bởi biểu thức sau

$$ Q_i = \sum_{k=1}^{p}\left(\vec{F}^a_k.\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_i} + \vec{M}^a_k.\frac{\partial\vec{\omega}_k}{\partial\dot{q}_i}\right) = \sum_{k=1}^{p}\left(\vec{F}^a_k.\vec{v}^{C_k}_{\dot{q}_i} + \vec{M}^a_k.\vec{\omega}^{B_k}_{\dot{q}_i}\right),(i=1,...,m) \qquad (5.161) $$

Thí dụ 5.9: Cho thanh thẳng đồng chất dài *l*, quay quanh một điểm O cố định. ở đầu thanh có lò xo xoắn với hệ số cứng là *k*. Chọn tọa độ suy rộng góc quay θ. TÌm lực suy rộng tương ứng.

Lời giải: Từ hình 5.20 ta có véctơ xác định vị trí khối tâm của thanh



Hình 5.20. Con lắc vật lý

$$\vec{r}^{\,C} = \frac{1}{2} l\vec{e}_r \qquad (1)$$

Đạo hàm hệ thức (1) theo t ở trọng hệ quy chiếu cố định ta được:

$$\vec{v}^{\,C} = \frac{1}{2} l\dot{\theta}\vec{e}_\theta \qquad (2)$$

Vận tốc góc của thanh là

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{e}_z \qquad (3)$$

Từ đó ta dễ dàng tính được vận tốc riêng của khối tâm và vận tốc góc riêng của thanh

$$\vec{v}_\theta^{\,C} = \frac{1}{2} l\vec{e}_\theta, \quad \vec{\omega}_\theta = \vec{e}_z \qquad (4)$$

Lực hoạt động và ngẫu lực hoạt động tác dụng lên thanh là

$$\vec{F}^a = -mg\vec{e}, \ \vec{M}^a = -k\theta\vec{e}_z \qquad (5)$$

Từ đó suy ra lực hoạt động suy rộng ứng với tọa độ suy rộng θ là

$$Q_\theta = -mg\vec{e}.\vec{v}_\theta^{\,C} - k\theta\vec{e}_z\vec{\omega}_\theta = -\frac{1}{2} mgl\sin\theta - k\theta \qquad (6)$$

**** Lực quán tính suy rộng của hệ các vật rắn***

DO NOT COPY

Thu gọn hệ lực quán tính của vật rắn B_k về khối tâm C_k của nó ta được một lực $\vec{F}_k^*$ và một ngẫu lực $\vec{M}_k^*$

$$\vec{F}_k^* = -m_k \vec{a}^{C_k} \qquad (5.162)$$

$$\vec{M}_k^* = -\vec{\vec{I}}_{C_k}.\vec{\alpha}_k - \vec{\omega}_k \times (\vec{\vec{I}}_{C_k}.\vec{\omega}_k) \qquad (5.163)$$

Trong đó m_k là khối lượng của vật rắn B_k, $\vec{\vec{I}}_{C_k}$ là tenxơ quán tính khối của vật rắn đối với khối tâm C_k của nó, $\vec{\omega}_k$ là vận tốc góc của vật rắn, $\vec{\alpha}_k$ là gia tốc của vật rắn, $\vec{a}^{C_k}$ là gia tốc khối tâm C_k của vật rắn.

Chú ý: Trong trường hợp vật rắn phẳng chuyển động trong mặt phẳng của nó, biểu thức $\vec{M}_k^*$ có dạng khá đơn giản như sau

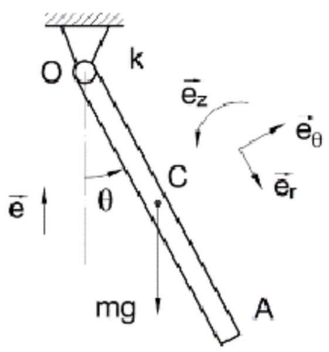
$$\vec{M}_k^* = -I_{C_k}.\vec{\alpha}_k \qquad (5.164)$$

Định nghĩa 5.4: Lực quán tính suy rộng của hệ *p* vật rắn ứng với tọa độ suy rộng q_i được định nghĩa bởi biểu thức sau

$$Q_i^* = \sum_{k=1}^{p}(\vec{F}_k^*.\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} + \vec{M}_k^*.\frac{\partial \vec{\omega}_k}{\partial \dot{q}_i}) = \sum_{k=1}^{p}(\vec{F}_k^*.\vec{v}_{\dot{q}_i}^{C_k} + \vec{M}_k^*.\vec{\omega}_{\dot{q}_i}^{B_k}) \ (i = 1,...,m) \qquad (5.165)$$

Thí dụ 5.10: Cho mô hình con lắc vật lí đơn như hình 5.21. Cho biết thanh OA đồng chất dài *l*, thiết diện không đổi, khối lượng là *m*. Tìm biểu thức lực quán tính suy rộng ứng với tọa độ suy rộng θ.

Lời giải: Theo thí dụ 5.9 ta có



Hình 5.21. Con lắc vật lý

$$\vec{v}^C = \frac{1}{2} l\dot{\theta}\vec{e}_\theta \qquad (1)$$

Đạo hàm (1) ta được

$$\vec{a}^C = \frac{1}{2} l\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - \frac{1}{2} l\dot{\theta}^2\vec{e}_r \qquad (2)$$

Từ hình 5.21 ta có biểu thức xác định vận tốc góc và gia tốc góc của vật rắn

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{e}_z, \quad \vec{\alpha} = \ddot{\theta}\vec{e}_z \qquad (3)$$

Từ (2) và (3) ta suy ra

$$\vec{F}^* = -m\vec{a}^C = \frac{1}{2} ml\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{2} ml\dot{\theta}^2\vec{e}_r \qquad (4)$$

$$\vec{M}^* = -I_C\vec{\alpha} = -\frac{1}{12} ml^2\ddot{\theta}\vec{e}_z \qquad (5)$$

Từ (1) và (3) ta suy ra biểu thức vận tốc riêng và vận tốc góc riêng ứng với θ

$$\vec{v}_\theta^C = \frac{1}{2} l\vec{e}_{\theta,} \qquad \vec{\omega}_\theta = \vec{e}_z \qquad (6)$$

Biểu thức (0.165) trong thí dụ này có dạng

$$Q_\theta^* = \vec{F}^*.\vec{v}_\theta^C + \vec{M}^*.\vec{\omega}_\theta^B \qquad (7)$$

Thế *(4)*, *(5)*, *(6)* vào *(7)* ta được biểu thức xác định lực quán tính suy rộng

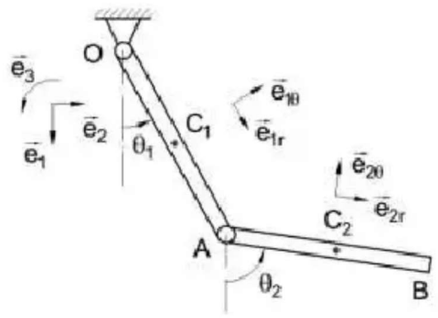
$$Q_\theta^* = \vec{v}_\theta^C.\vec{F}^* + \vec{\omega}_\theta.\vec{M}^* = -\frac{ml^2}{4}\ddot{\theta} - \frac{ml^2}{12}\ddot{\theta} = -\frac{ml^2}{3}\ddot{\theta} \qquad (8)$$

Thí dụ 5.11: Cho mô hình robot phẳng hai khâu như hình 5.34. Cho biết chiều dài các thanh OA = l_1, AB =l_2. Các thanh đồng chất thiết diện

DO NOT COPY

không đổi có khối lượng tương ứng là m_1, m_2. Hãy xác định các lực quán tính suy rộng tương ứng với các tọa độ suy rộng θ_1, θ_2.

Lời giải: Từ hình 5.22 ta tính được vận tốc và gia tốc các khối tâm của các thanh là



Hình 5.22. Robot hai khâu

$$\vec{v}^{C_1} = \frac{1}{2} l_1 \dot{\theta}_1 \vec{e}_{1\theta} \qquad (1)$$

$$\vec{a}^{C_1} = \frac{1}{2} l_1 \ddot{\theta}_1 \vec{e}_{1\theta} - \frac{1}{2} l_1 \dot{\theta}_1^2 \vec{e}_{1r} \qquad (2)$$

$$\vec{v}^{C_2} = l_1 \dot{\theta}_1 \vec{e}_{1\theta} + \frac{1}{2} l_2 \dot{\theta}_2 \vec{e}_{2\theta} \qquad (3)$$

$$\vec{a}^{C_2} = l_1 \ddot{\theta}_1 \vec{e}_{1\theta} - l_1 \dot{\theta}_1^2 \vec{e}_{1r} + \frac{1}{2} l_2 \ddot{\theta}_2 \vec{e}_{2\theta} - \frac{1}{2} l_2 \dot{\theta}_2^2 \vec{e}_{2r} \qquad (4)$$

Vận tốc góc và gia tốc góc của thanh OA (vật rắn B_1) và thanh AB (vật rắn B_2) là

$$\vec{\omega}^{B_1} = \dot{\theta}_1 \vec{e}_3, \ \vec{\omega}^{B_2} = \dot{\theta}_2 \vec{e}_3 \qquad (5)$$

$$\vec{\alpha}^{B_1} = \ddot{\theta}_1 \dot{e}_3, \ \vec{\alpha}^{B_2} = \ddot{\theta}_2 \dot{e}_3 \qquad (6)$$

Quan hệ giữa các véctơ đơn vị của các hệ quy chiếu động và véctơ đơn vị của hệ quy chiếu cố định $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ có dạng như sau:

$$\vec{e}_{1r} = \cos(\theta_2 - \theta_1)\vec{e}_{2r} - \sin(\theta_2 - \theta_1)\vec{e}_{2\theta} = c\cos\theta_1\vec{e}_1 + \sin\theta_1\vec{e}_2 \quad (7)$$

$$\vec{e}_{1\theta} = \sin(\theta_2 - \theta_1)\vec{e}_{2r} + c\cos(\theta_2 - \theta_1)\vec{e}_{2\theta} = -\sin\theta_1\vec{e}_1 + c\cos\theta_1\vec{e}_2 \quad (8)$$

$$\vec{e}_{2r} = \cos(\theta_2 - \theta_1)\vec{e}_{1r} + \sin(\theta_2 - \theta_1)\vec{e}_{1\theta} = c\cos\theta_2\vec{e}_1 + \sin\theta_2\vec{e}_2 \quad (9)$$

$$\vec{e}_{2\theta} = \sin(\theta_2 - \theta_1)\vec{e}_{1r} - c\cos(\theta_2 - \theta_1)\vec{e}_{1\theta} = -\sin\theta_2\vec{e}_1 + \cos\theta_2\vec{e}_2 \quad (10)$$

Thu gọn hệ lực quán tính của thanh OA về khối tâm C_1 của nó ta được một lực $\vec{F}_1^*$ và một ngẫu lực $\vec{M}_1^*$

$$\vec{F}_1^* = -m_1\vec{a}^{C_1} = \frac{1}{2}m_1 l_1\dot{\theta}_1^2\vec{e}_{1r} - \frac{1}{2}m_1 l_1\ddot{\theta}_1\vec{e}_{1\theta}, \quad \vec{M}_1^* = -I_{C_1}\ddot{\theta}\vec{e}_3 \quad (11)$$

Thế các biểu thức *(7)*, *(8)* vào *(11)*và thay $I_{C_1} = m_1 l_1^2 / 12$ ta được

$$\vec{F}_1^* = -m_1\vec{a}^{C_1} = \frac{1}{2}m_1 l_1(\dot{\theta}_1^2\cos\theta_1 + \ddot{\theta}_1\sin\theta_1)\vec{e}_1 + \frac{1}{2}m_1 l_1(\dot{\theta}_1^2\sin\theta_1 - \ddot{\theta}_1\cos\theta_1)\vec{e}_2 \quad (12)$$

$$\vec{M}_1^* = -\frac{1}{12}m_1 l_1\ddot{\theta}_1\vec{e}_3 \quad (13)$$

Thu gọn hệ lực quán tính của thanh AB về khối tâm C_2 của nó ta được một lực $\vec{F}_2^*$ và một ngẫu lực $\vec{M}_2^*$

$$\vec{F}_2^* = -m_2\vec{a}^{C_2} = m_2 l_1\dot{\theta}_1^2\vec{e}_{1r} - m_2 l_1\ddot{\theta}_1\vec{e}_{1\theta} + \frac{1}{2}m_2 l_2\dot{\theta}_2^2\vec{e}_{2r} - \frac{1}{2}m_2 l_2\ddot{\theta}_2\vec{e}_{2\theta} \quad (14)$$

$$\vec{M}_2^* = -I_{C_2}\ddot{\theta}_2\vec{e}_3 \quad (15)$$

Thế *(7)*, *(8)*, *(9)* và *(10)*, vào *(14), (15)* ta được

$$\begin{aligned}\vec{F}_2^* = m_2&\left[l_1(\dot{\theta}_1^2\cos\theta_1 + \ddot{\theta}_1\sin\theta_1) + \frac{1}{2}l_2(\dot{\theta}_2^2\cos\theta_2 + \ddot{\theta}_2\sin\theta_2)\right]\vec{e}_1 \\ &+m2\left[l_1(\dot{\theta}_1^2\sin\theta_1 - \ddot{\theta}_1\cos\theta_1) + \frac{1}{2}l_2(\dot{\theta}_2^2\sin\theta_2 - \ddot{\theta}_2\cos\theta_2)\right]\vec{e}_2\end{aligned} \quad (16)$$

$$\vec{M}_2^* = -I_{C_2}\vec{\alpha}_2 = -\frac{1}{12}m_2 l_2^2\ddot{\theta}_2\vec{e}_3 \quad (17)$$

DO NOT COPY

Từ các công thức (1), (3), (5) ta suy ra các vận tốc riêng và vận tốc góc riêng

$$\vec{v}^{C_1}_{\dot{\theta}_1} = \frac{1}{2} l_1 \vec{e}_{1\theta} = -\frac{1}{2} l_1 \sin\theta_1 \vec{e}_1 + \frac{1}{2} l_1 \cos\theta_1 \vec{e}_2, \qquad \vec{v}^{C_1}_{\dot{\theta}_2} = 0 \tag{18}$$

$$\vec{v}^{C_2}_{\dot{\theta}_1} = l_1 \vec{e}_{1\theta} = -l_1 \sin\theta_1 \vec{e}_1 + l_1 \cos\theta_1 \vec{e}_2 \tag{19}$$

$$\vec{v}^{C_2}_{\dot{\theta}_2} = \frac{1}{2} l_2 \vec{e}_{2\theta} = -\frac{1}{2} l_2 \sin\theta_2 \vec{e}_1 + \frac{1}{2} l_2 \cos\theta_2 \vec{e}_2 \tag{20}$$

$$\vec{\omega}^{B_2}_{\dot{\theta}_1} = 0, \qquad \vec{\omega}^{B_2}_{\dot{\theta}_2} = \vec{e}_3, \qquad \vec{\omega}^{B_1}_{\dot{\theta}_1} = \vec{e}_3, \qquad \vec{\omega}^{B_1}_{\dot{\theta}_1} = 0 \tag{21}$$

Thế các biểu thức trên vào công thức tính lực quán tính suy rộng

$$Q_i^* = \sum_{k=1}^{2} (\vec{v}^{C_k}_{q_i} . \vec{F}_k^* + \vec{\omega}^{B_k}_{q_i} . \vec{M}_k^*), \qquad i = (1,2) \tag{22}$$

Ta được

$$Q^*_{\theta 1} = -\frac{1}{3}(m_1 + 3m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 - \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) + \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) \tag{23}$$

$$Q^*_{\theta 2} = -\frac{1}{3} m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 - \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) + \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) \tag{24}$$

c) Thiết lập các phương trình Kane cho hệ nhiều vật

Các phương trình Kane cho hệ nhiều vật hôlônôm có cấu trúc cây

Thu gọn hệ các lực tác dụng lên vật rắn B_k về khối tâm C_k của nó ta được một lực $\vec{F}_k$ và một ngẫu lực $\vec{M}_k$

$$\vec{F}_k = \vec{F}_k^a + \vec{F}_k^c \ (k = 1,..., p) \tag{5.166}$$

$$\vec{M}_k = \vec{M}_k^a + \vec{M}_k^c \qquad (k = 1,..., p) \tag{5.167}$$

Thu gọn hệ các lực quán tính của vật rắn B_k về khối tâm C_k của nó ta được một lực quán tính

$$\vec{F}_k^* = -m_k \vec{a}_k \qquad (5.168)$$

$$\vec{M}_k^* = -\vec{\vec{I}}_k.\vec{\alpha}_k - \vec{\omega}_k \times (\vec{\vec{I}}_k.\vec{\omega}_k) \qquad (5.169)$$

Theo nguyên lý d'Alembert ta có

$$\vec{F}_k^a + \vec{F}_k^c + \vec{F}_k^* = \vec{0} \quad (k = 1,..., p) \qquad (5.170)$$

$$\vec{M}_k^a + \vec{M}_k^c + \vec{M}_k^* = \vec{0} \ (k = 1,..., p) \qquad (5.171)$$

Nhân vô hướng phương trình (0.170) với độ dời ảo $\delta\vec{r}_k$ của khối tâm, phương trình (0.171) với độ quay ảo $\delta\vec{\varphi}_k$ của vật rắn B_k rồi cộng lại ta được

$$\sum_{k=1}^{p}(\vec{F}_k^a + \vec{F}_k^c + \vec{F}_k^*).\delta\vec{r}_k + \sum_{k=1}^{p}(\vec{M}_k^a + \vec{M}_k^c + \vec{M}_k^*).\delta\vec{\varphi}_k = 0 \qquad (5.172)$$

Theo giả thiết liên kết lý tưởng ta có

$$\sum_{k=1}^{p}(\vec{F}_k^c.\delta\vec{r}_k + \vec{M}_k^c.\delta\vec{\varphi}_k) = 0 \qquad (5.173)$$

Phương trình (5.172) bây giờ có dạng

$$\sum_{k=1}^{p}(\vec{F}_k^a + \vec{F}_k^*).\delta\vec{r}_k + \sum_{k=1}^{p}(\vec{M}_k^a + \vec{M}_k^*).\delta\vec{\varphi}_k = 0 \qquad (5.174)$$

Từ phần động học ta có các quan hệ

$$\begin{aligned} \dot{r}_k &= \dot{r}_k(q_1,...,q_m,t) \\ \vec{\varphi}_k &= \vec{\varphi}_k(q_1,...,q_m,t) \end{aligned} \qquad (5.175)$$

Từ đó suy ra

$$\delta_{\dot{r}_k} = \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_i}\delta q_i = \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial\vec{v}_k}{\partial\dot{q}_i}\delta q_i \qquad (5.176)$$

$$\delta_{\dot{\varphi}_k} = \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial\vec{\varphi}_k}{\partial q_i}\delta q_i = \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial\vec{\omega}_k}{\partial\dot{q}_i}\delta q_i \qquad (5.177)$$

DO NOT COPY

Thế các biểu thức (0.176) và (0.177) vào phương trình (0.174) ta được

$$\sum_{i=1}^{m}(\sum_{i=1}^{p}\vec{F}_k^a.\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_i}+\vec{M}_k^a.\frac{\partial\vec{\omega}_k}{\partial\dot{q}_i})\delta q_i+\sum_{i=1}^{m}(\sum_{i=1}^{p}\vec{F}_k^*.\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_i}+\vec{M}_k^*.\frac{\partial\vec{\omega}_k}{\partial\dot{q}_i})\delta q_i=0 \qquad (5.178)$$

Theo định nghĩa lực hoạt động suy rông và lực quán tính suy rộng

$$Q_i^a=\sum_{i=1}^{p}(\vec{F}_k^a.\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_i}+\vec{M}_k^a.\frac{\partial\vec{\omega}_k}{\partial\dot{q}_i}) \qquad (i=1,...,m) \qquad (5.179)$$

$$Q_i^*=\sum_{i=1}^{p}(\vec{F}_k^*.\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_i}+\vec{M}_k^*.\frac{\partial\vec{\omega}_k}{\partial\dot{q}_i}) \qquad (i=1,...,m) \qquad (5.180)$$

Do đó phương trình (0.178) có dạng

$$\sum_{i=1}^{m}(Q_i^a+Q_i^*)\delta q_i=0 \qquad (5.181)$$

Đối với hệ các vật rắn hôlônôm *f* bậc tự do, ta chọn các tọa độ suy rộng độc lập (các tọa độ suy rộng tối thiểu) $q_1,q_2,...,q_f$ xác định vị trí của hệ. Do các $\delta q_i\,(i=1,...,f)$ độc lập tuyến tính, từ (0.181) ta suy ra các phương trình Kane cho hệ nhiều vật hôlônôm

$$Q_i^a+Q_i^*=0 \quad (i=1,...,f) \qquad (5.182)$$

** Các phương trình Kane dạng nhân tử cho hệ nhiều vật rắn phi hôlônôm*

Xét *p* vật rắn. Vị trí của hệ được xác định bởi *m* tọa độ suy rộng dư $q_1,q_2,...,q_m$. Giả sử hệ chịu *r* liên kết hôlônôm

$$f(q_1,q_2,...,q_m,t)=0 \qquad (i=1,2,...,r) \qquad (5.183)$$

Và *s* liên kết phi hôlônôm tuyến tính

$$\sum_{k=1}^{m}a_{jk}\dot{q}_k+a_{j0}=0 \qquad (j=1,2,...,s) \qquad (5.184)$$

Từ (5.183) và (5.184) ta suy ra các phương trình rang buộc các biến phân δq_k (các di chuyển ảo)

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial f_i}{\partial q_k}\delta q_k = 0 \qquad (i=1,2,...,r) \qquad (5.185)$$

$$\sum_{k=1}^{m} a_{jk}\delta q_k = 0 \qquad (i=1,2,...,s) \qquad (5.186)$$

Ta đưa vào các ký hiệu

$$b_k = Q_k^a + Q_k^* \qquad (k=1,...,m) \qquad (5.187)$$

Khi đó ta có

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ ... \\ b_m \end{bmatrix}, \mathbf{s} = \begin{bmatrix} \delta q_1 \\ ... \\ \delta q_m \end{bmatrix} \qquad (5.188)$$

Phương trình (5.181) có thể được viết lại dưới dạng

$$\mathbf{b}^T\mathbf{s} = 0 \qquad (5.189)$$

Bây giờ ta đưa them vào ký hiệu

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta q_1} & ... & \frac{\delta f_1}{\delta q_m} \\ ... & ... & ... \\ \frac{\delta f_r}{\delta q_1} & ... & \frac{\delta f_r}{\delta q_m} \\ a_{11} & ... & a_{1m} \\ ... & ... & ... \\ a_{s1} & ... & a_{sm} \end{bmatrix} \qquad (5.190)$$

Với các kí hiệu trên, hai phương trình (0.185) và (0.186) có thể biểu diễn dưới dạng ma trận sau

$$\mathbf{A}.\mathbf{s} = 0 \qquad (5.191)$$

Theo định lý nhân tử Lagrange, từ (0.189) và (0.190) ta suy ra

DO NOT COPY

$$\mathbf{b} + \mathbf{A}^T\boldsymbol{\lambda} = 0 \qquad (5.192)$$

Trong đó

$$\boldsymbol{\lambda} = \left[\lambda_1, ..., \lambda_r, \mu_1, ..., \mu_s\right]^T \qquad (5.193)$$

là các nhân từ Lagrange. Từ biểu thức (0.192) suy ra

$$Q_k^a + Q_k^* + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial q_k} + \sum_{j=1}^{s} \mu_j a_{jk} = 0 \qquad (k = 1,2,...,m) \qquad (5.194)$$

Hệ các phương trình (0.194) được gọi là các phương trình Kane dạng nhân tử cho hệ nhiều vật hôlônôm với các liên kết phi hôlônôm tuyến tính. Cùng với m phương trình vi phân (0.194) ta còn có r phương trình liên kết hôlônôm (0.183) và s phương trình liên kết phi hôlônôm tuyến tính (0.184). Như thế ta có hệ m+r+s phương trình vi phân đại số. Chúng được sử dụng để xác định m tọa độ suy rộng dư, r nhân tử λ_i và s nhân tử μ_j.

Chú ý: Trong trường hợp hệ nhiều vật hôlônôm có cấu trúc mạch vòng, các phương trình Kane dạng nhân tử có dạng

$$Q_k^a + Q_k^* + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial q_k} = 0 \qquad (k = 1,2,...,m) \qquad (5.195)$$

$$f_i(q_1, q_2, ..., q_m, t) = 0 \qquad (i = 1,2,...,r) \qquad (5.196)$$

d) Các thí dụ áp dụng

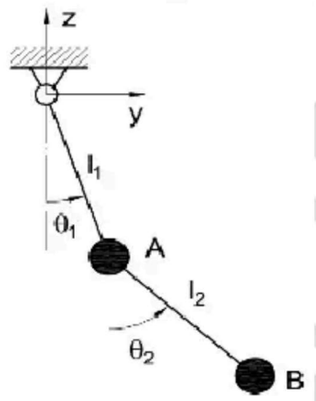
Thí dụ 5.12: Cho mô hình con lắc kép toán học như hình vẽ. Khối lượng các chất điểm tương ứng là m_1, m_2. Áp dụng các phương trình Kane, thiết lập các phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ.

Lời giải: Vị trí của cơ hệ được xác định bởi hai tọa độ suy rộng độc lập θ_1, θ_2. Từ hình 5.23 ta dễ dàng xác định vị trí các chất điểm

$$\mathbf{r}^A = \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 \sin\theta_1 \\ -l_1 \cos\theta_1 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

$$\mathbf{r}^B = \mathbf{r}^A + \begin{bmatrix} 0 \\ l_2 \sin\theta_2 \\ -l_2\cos\theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin\theta_2 \\ -l_1\cos\theta_1 - l_2\cos\theta_2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta tính được các vận tốc riêng:



Hình 5.23. Con lắc kép toán học

$$\mathbf{v}^A_{\dot\theta_1} = \frac{{}^R\partial \mathbf{r}^A}{\partial\theta_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ l_1\cos\theta_1 \\ l_1\sin\theta_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}^A_{\dot\theta_2} = \frac{{}^R\partial \mathbf{r}^A}{\partial\theta_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\mathbf{v}^B_{\dot\theta_1} = \frac{{}^R\partial \mathbf{r}^B}{\partial\theta_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ l_1\cos\theta_1 \\ l_1\sin\theta_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}^B_{\dot\theta_2} = \frac{{}^R\partial \mathbf{r}^B}{\partial\theta_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ l_2\cos\theta_2 \\ l_2\sin\theta_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Đạo hàm hai lần theo thời gian các công thức (1) và (2) ta xác định được gia tốc của các chất điểm A và B

$$\mathbf{a}^A = \frac{{}^R d^2\mathbf{r}^A}{dt^2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -l_1\sin\theta_1\dot\theta_1^2 + l_1\cos\theta_1\ddot\theta_1 \\ l_1\cos\theta_1\dot\theta_1^2 + l_1\sin\theta_1\ddot\theta_1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\mathbf{a}^B = \frac{{}^R d^2\mathbf{r}^B}{dt^2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -l_1 \sin\theta_1\dot{\theta}_1^2 + l_1\cos\theta_1\ddot{\theta}_1 - l_2 \sin\theta_2\dot{\theta}_2^2 + l_2\cos\theta_2\ddot{\theta}_2 \\ l_1\cos\theta_1\dot{\theta}_1^2 + l_1 \sin\theta_1\ddot{\theta}_1 + l_2\cos\theta_2\dot{\theta}_2^2 + l_2 \sin\theta_2\ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Các lực hoạt động tác dụng lên chất điểm là các trọng lượng của chúng

$$\mathbf{F}_A^a = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_1 g \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{F}_B^a = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_2 g \end{bmatrix} \quad (7)$$

Các lực quán tính của chất điểm là

$$\mathbf{F}_A^* = -m_1\mathbf{a}^A = m_1 \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 \sin\theta_1\dot{\theta}_1^2 - l_1\cos\theta_1\ddot{\theta}_1 \\ -l_1\cos\theta_1\dot{\theta}_1^2 - l_1 \sin\theta_1\ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\mathbf{F}_B^* = -m_2\mathbf{a}^B = m_2 \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 \sin\theta_1\dot{\theta}_1^2 - l_1\cos\theta_1\ddot{\theta}_1 + l_2 \sin\theta_2\dot{\theta}_2^2 - l_2\cos\theta_2\ddot{\theta}_2 \\ -l_1\cos\theta_1\dot{\theta}_1^2 + l_1 \sin\theta_1\ddot{\theta}_1 - l_2\cos\theta_2\dot{\theta}_2^2 - l_2 \sin\theta_2\ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Lực hoạt động suy rộng ứng với tọa độ suy rộng thứ nhất θ_1

$$Q_{\theta_1} = (F_A^a)^T v_{\dot{\theta}_1}^A + (F_B^a)^T v_{\dot{\theta}_1}^B$$

$$Q_{\theta_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -m_1 g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ l_1\cos\theta_1 \\ l_1 sin\theta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -m_2 g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ l_1\cos\theta_1 \\ l_1 sin\theta_1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$Q_{\theta_1} = -(m_1 + m_2) g l_1 \sin\theta_1$$

Lực hoạt động suy rộng ứng với tọa độ suy rộng thứ hai θ_2

$$Q_{\theta_2} = (F_A^a)^T v_{\dot{\theta}_2}^A + (F_B^a)^T v_{\dot{\theta}_2}^B$$

$$Q_{\theta_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & m_1 g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & m_2 g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ l_2 \cos\theta_2 \\ l_2 sin\theta_2 \end{bmatrix} \qquad (11)$$

$$Q_{\theta_2} = -m_2 g l_2 \sin\theta_2$$

Lực quán tính suy rộng ứng với tọa độ suy rộng thứ θ_1 là

$$Q^*_{\theta_1} = (v^A_{\dot{\theta}_1})^T F^*_A + (v^B_{\dot{\theta}_1})^T F^*_B$$

$$\begin{aligned} Q^*_{\theta_1} &= m_1 \begin{bmatrix} 0 & l_1 \cos\theta_1 & l_1 \sin\theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 sin\theta_1 \dot{\theta}_1^2 - l_1 \cos\theta_1 \ddot{\theta}_1 \\ -l_1 \cos\theta_1 \dot{\theta}_1^2 - l_1 sin\theta_1 \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} \\ &+ m_2 \begin{bmatrix} 0 & l_1 \cos\theta_1 & l_1 \sin\theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 sin\theta_1 \dot{\theta}_1^2 - l_1 \cos\theta_1 \ddot{\theta}_1 + l_2 sin\theta_2 \dot{\theta}_2^2 - l_2 \cos\theta_2 \ddot{\theta}_2 \\ -l_1 \cos\theta_1 \dot{\theta}_1^2 - l_1 \sin\theta_1 \ddot{\theta}_1 - l_2 \cos\theta_2 \dot{\theta}_2^2 - l_2 \sin\theta_2 \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \qquad (12)$$

$$Q^*_{\theta_1} = -\left[l_1^2 (m_1 + m_2) \ddot{\theta}_1 + l_1 l_2 m_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + l_1 l_2 m_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right]$$

Lực quán tính suy rộng ứng với tọa độ suy rộng thứ θ_2 là

$$Q^*_{\theta_2} = (\mathbf{v}^A_{\dot{\theta}_2})^T \mathbf{F}^*_A + (\mathbf{v}^B_{\dot{\theta}_2})^T \mathbf{F}^*_B$$

$$\begin{aligned} Q^*_{\theta_2} &= m_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 \sin\theta_1 \dot{\theta}_1^2 - l_1 \cos\theta_1 \ddot{\theta}_1 \\ -l_1 \cos\theta_1 \dot{\theta}_1^2 - l_1 \sin\theta_1 \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} \\ &+ m_2 \begin{bmatrix} 0 & l_1 \cos\theta_1 & l_1 \sin\theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 \sin\theta_1 \dot{\theta}_1^2 - l_1 \cos\theta_1 \ddot{\theta}_1 + l_2 \sin\theta_2 \dot{\theta}_2^2 - l_2 \cos\theta_2 \ddot{\theta}_2 \\ -l_1 \cos\theta_1 \dot{\theta}_1^2 - l_1 \sin\theta_1 \ddot{\theta}_1 - l_2 \cos\theta_2 \dot{\theta}_2^2 - l_2 \sin\theta_2 \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \qquad (13)$$

$$Q^*_{\theta_2} = -m_2 l_2 \left[l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + l_2^2 \ddot{\theta}_2 \right]$$

Thế các biểu thức trên vào phương trình Kane

DO NOT COPY

$$Q_i^a + Q_i^* = 0,\ i = 1,2 \qquad (14)$$

Ta được hai phương trình vi phân chuyển động của con lắc kép toán học:

$$\begin{aligned} &l_1(m_1+m_2)\ddot{\theta}_1 + l_2 m_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1-\theta_2) + l_2 m_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1-\theta_2) \\ &+(m_1+m_2) g l_1 \sin\theta_1 = 0 \end{aligned} \qquad (15)$$

$$l_1\ddot{\theta}_1\cos(\theta_1\text{-}\theta_2)\text{-}l_1\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1\text{-}\theta_2) + l_2\ddot{\theta}_2 + g\sin\theta_2 = 0 \qquad (16)$$

5.6.2. Các phương trình Gibbs-Appel của hệ nhiều vật

a) Tựa tọa độ và tựa vận tốc

** Các tọa độ suy rộng tối thiểu và các vận tốc suy rộng tối thiểu*

Xét hệ p vật rắn chịu r liên kết hôlônôm và s liên kết phi hôlônôm tuyến tính. Gọi $q_1, q_2, ..., q_m$ là các tọa độ suy rộng tối thiểu (các tọa độ suy rộng độc lập tối thiểu đủ để xác định vị trí của hệ vật rắn). Các phương trình liên kết hôlônôm có dạng

$$f_a(q_1, q_2, ..., q_m, t) = 0 \qquad (\alpha = 1, ..., r) \qquad (5.197)$$

Các phương trình liên kết phi hôlônôm tuyến tính

$$\sum_{i=1}^{m} a_{\beta i}\dot{q}_i + a_\beta = 0 \qquad (\beta = 1,2,...,s) \qquad (5.198)$$

Để tìm các hạn chế do các liên kết phi hôlônôm đặt lên các di chuyển ảo $\delta q_i (i = 1,...,m)$, ta thay $\dot{q}_i$ trong (0.198) bởi δ_{q_i} và bỏ qua a_β. Từ (0.198) ta nhận được các phương trình rang buộc các biến phân

$$\sum_{i=1}^{m} a_{\beta i}\delta q_i = 0 \qquad (\beta = 1,2,...,s) \qquad (5.199)$$

Như thể đối với hệ phi hôlônôm, m tọa độ suy rộng tối thiểu $q_1, q_2, ..., q_m$ có thể lấy các giá trị tùy ý, nhưng m vận tốc của chúng $\dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_m$ lại không thể lấy các giá trị tùy ý được mà chúng phụ thuộc lẫn nhau bởi s phương trình liên kết phi hôlônôm (0.194). Ta phân m vân tốc suy rộng $\dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_m$ thành hai nhóm (có thể kí hiệu lại): f vận tốc suy rộng độc lập $\dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_f$ $(f = m - s)$ và s vận tốc suy rộng phụ thuộc $\dot{q}_{f+1}, ..., \dot{q}_m$

Trong đó *f* vận tốc suy rộng độc lập có thể lấy các giá trị tùy ý, còn *s* vận tốc suy rộng phụ thuộc được xác định nhờ các phương trình liên kết (5.198). Tương tự như thế, do *s* phương trình rang buộc (0.200), trong số *m* di chuyển ảo $\delta q_i (i = 1,2,...,m)$ chỉ có *f* di chuyển ảo độc lập tuyến tính. Số bậc tự do của hệ phi hôlônôm nhỏ hơn số tọa độ suy rộng tối thiểu của hệ.

Tóm lại, trong hệ nhiều vật hôlônôm số tọa độ suy rộng tối thiểu bằng số bậc tự do của hệ, còn trong hệ phi hôlônôm số bậc tự do của hệ nhỏ hơn số tọa đọ suy rộng tối thiểu.

** Khái niệm tựa tọa độ và khái niệm tựa vận tốc*

Ta đưa vào khái niệm tựa vận tốc, ký hiệu là $\dot{\pi}_1,...,\dot{\pi}_f (f = m - s)$, xác định bởi công thức sau:

$$\dot{\pi}_k = \sum_{i=1}^{m} b_{ki}\dot{q}_i \quad (i = 1,...,f) \qquad (5.200)$$

Trong đó b_{ki} là các hàm của các tọa độ suy rộng $\dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_m$ và thời gian t. yêu cầu của việc chọn các hệ thức (0.200) là: f phương trình (0.200) cùng với s phương trình (0.198) tạo thành một hệ m = f +s phương trình đại số tuyến tính có m ẩn $\dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_m$ có hạng là m. Nói cách khác, từ (0.198) và (0.200) ta phải xác định được các $\dot{q}_i (i = 1,...,m)$ một cách duy nhất

$$\dot{q}_i = \sum_{j=1}^{f} h_{ij}\dot{\pi}_j + h_i \qquad (i = 1,...,m) \qquad (5.201)$$

Trong đó h_{ij} và h_i là các hàm của $q_1,...,q_m$ và *t*. Các đại lượng $\dot{\pi}_k (k = 1,...,f)$ là các hàm của $q_1,...,q_m$ và *t* dưới dạng biểu thức giải tích.

Cùng với công thức (0.200) ta đưa vào khái niệm biên phân đẳng thời của các tựa tọa độ

$$\delta\pi_k = \sum_{i=1}^{m} b_{ki}\delta q_i \qquad (k = 1,...,f) \qquad (5.202)$$

Các đại lượng $\delta\pi_k (k = 1,..., f)$ được gọi là các tựa di chuyển ảo. Theo giả thiết $\delta\pi_k (k = 1,..., f)$ là các đại lượng độc lập tuyến tính, còn $\delta q_i (i = 1,..., m)$ được xác định bởi các hệ phương trình (0.200) và (0.202). Từ (0.200) và (0.202). ta suy ra

$$\delta q_i = \sum_{k=1}^{f} h_{ik} \delta\pi_k \qquad (i = 1,..., m) \tag{5.203}$$

** Công thức xác định đạo hàm riêng của véctơ gia tốc điểm theo tựa gia tốc*

Lấy một điểm P bất kỳ của vật rắn B. Vị trí của điểm P được xác định bởi biểu thức

$$\vec{r}_P = \vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, ..., q_m, t) \tag{5.204}$$

Đạo hàm biểu thức (0.204) theo *t* ở trọng hệ quy chiếu cố định R_0 ta được

$$\dot{\vec{r}}_P = \vec{v} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \tag{5.205}$$

Thế biểu thức (0.200) vào phương trình (0.205) ta được

$$\dot{\vec{r}}_P = \vec{v} = \sum_{j=1}^{f} \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} h_{ij} \right) \dot{\pi}_j + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} h_i + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \tag{5.206}$$

Nếu ta đưa vào các ký hiệu

$$\vec{k}_j = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} h_{ij}, \qquad \vec{k} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} h_i + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \tag{5.207}$$

Thì biểu thức (0.206) có dạng

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v} = \sum_{j=1}^{f} \vec{k}_j \dot{\pi}_j + \vec{k} \tag{5.208}$$

Từ (0.208) ta suy ra:

$$d\vec{r} = \sum_{j=1}^{f} \vec{k}_j d\pi_j + \vec{k}dt \qquad (5.209)$$

Do đó ta có hệ thức:

$$\delta\vec{r} = \sum_{j=1}^{f} \vec{k}_j \delta\pi_j \qquad (5.210)$$

Đạo hàm biểu thức (0.208) theo *t* ở trong hệ quy chiếu cố định R_0 ta được:

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \sum_{j=1}^{f} \vec{k}_j \ddot{\pi}_j + \sum_{j=1}^{f} \frac{d\vec{k}_j}{dt} \dot{\pi}_j + \frac{d\vec{k}}{dt} \qquad (5.211)$$

Trong đó $\ddot{\pi}_j$ là tựa gia tốc. Từ (0.211) ta suy ra công thức xác định đạo hàm véctơ gia tốc điểm P theo tựa gia tốc:

$$\frac{\partial\vec{a}}{\partial\ddot{\pi}_j} = \vec{k}_j \qquad (5.212)$$

b) Thiết lập các phương trình Gibbs-Appel

** Thiết lập phương trình Gibbs-Appel cho hệ n chất điểm*

Nguyên lí d'Alembert-lagrange cho hệ *n* chất điểm có dạng

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^a . \delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i . \delta\vec{r}_i \qquad (5.213)$$

Thế biểu thức (0.206) vào (0.209)

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^a . \sum_{j=1}^{f} \vec{k}_{ij} \delta\pi_j = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i . \sum_{j=1}^{f} \vec{k}_{ij} \delta\pi_j \\ &\sum_{j=1}^{f} \left(\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^a . \vec{k}_{ij} \right) \delta\pi_j = \sum_{j=1}^{f} \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i . \vec{k}_{ij} \right) \delta\pi_j \end{aligned} \qquad (5.214)$$

Ta đưa vào biểu thức

$$\Pi_j = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^a . \vec{k}_{ij} = \sum_{l=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^a . \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_l} h_{lj} \right) \qquad (5.215)$$

DO NOT COPY

Và gọi $\Pi_j (j=1,...,f)$ là các đại lượng lực suy rộng ứng với tọa độ π_j . Thế (0.215) vào (0.214) ta được

$$\sum_{j=1}^{f}\left(\Pi_j - \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i . \vec{k}_{ij}\right)\delta\pi_j = 0 \qquad (5.216)$$

Bây giờ ta đưa vào hàm G xác định bởi công thức

$$G = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i^2 \qquad (5.217)$$

Hàm G được gọi là hàm Gibbs-Appel (hoặc cũng có người gọi là năng lượng gia tốc). Chú ý đến (0.212) ta có biến đổi

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i . \vec{k}_{ij} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i . \frac{\partial \vec{a}_i}{\partial \ddot{\pi}_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial G}{\partial \ddot{\pi}_i} \qquad (5.218)$$

Thế (0.218) vào (0.216) ta được

$$\sum_{j=1}^{f}(\Pi_j - \frac{\partial G}{\partial \ddot{\pi}_i})\delta\pi_j = 0 \qquad (5.219)$$

Do các đại lượng $\delta\pi_j (j=1,...,f)$ là độc lập tuyến tính nên từ *(5.219)* ta suy ra

$$\frac{\partial G}{\partial \ddot{\pi}_i} = \Pi_j, \quad (j=1,...,f) \qquad (5.220)$$

Phương trình (0.220) được gọi là phương trình Gibbs-Appel. Số lượng các phương trình của hệ (0.220) đúng bằng số bậc tự do của hệ. Phương trình (0.220) đã được Gibbs tìm ra năm 1879 đối với hệ hôlônôm và Appel xây dựng năm 1900 đối với hệ phi hôlônôm.

** Thiết lập phương trình Gibbs-Appel cho hệ p vật rắn*

Nguyên lý d'Alembert –Lagrange đối với hệ *p* vật rắn có dạng

$$\int_{(s)} (d\vec{F}^a - dm\ddot{\vec{r}})\delta\vec{r} = 0 \qquad (5.221)$$

Thế vào biểu thức (0.210) vào (0.221) ta được:

$$\sum_{j=1}^{f}\left(\int_{(s)} d\vec{F}^a . \vec{k}_j\right)\delta\pi_j - \sum_{j=1}^{f}\left(\int_{(s)} \vec{a} . \vec{k}_j dm\right)\delta\pi_j = 0 \qquad (5.222)$$

Biểu thức:

$$\Pi_j = \left(\int_{(s)} d\vec{F}^a . \vec{k}_j \right) \qquad (5.223)$$

Được gọi là tựa lực suy rộng ứng với tựa tọa độ π_j.

Thế (0.223) vào (0.222) ta được

$$\sum_{j=1}^{f} \left(\Pi_j - \int_{(s)} \vec{a} . \vec{k}_j dm \right) \delta\pi_j = 0 \qquad (5.224)$$

Biểu thức

$$G = \frac{1}{2} \int_{(s)} \vec{a}^2 dm \qquad (5.225)$$

Được gọi là hàm Gibbs-Appel. Đạo hàm riêng hàm Gibbs-Appel theo tựa gia tốc $\ddot{\pi}_j$ và chú ý đến quan hệ (0.211) ta có

$$\frac{\partial G}{\partial \ddot{\pi}_j} = \int_{(s)} \vec{a} . \frac{\partial \vec{a}}{\partial \ddot{\pi}_j} dm = \int_{(s)} \vec{a} . \vec{k}_j dm \qquad (5.226)$$

Thế (0.226) vào phương trình (0.224) ta có

$$\sum_{j=1}^{f} \left(\Pi_j - \frac{\partial G}{\partial \ddot{\pi}_j} \right) \delta\pi_j = 0 \qquad (5.227)$$

Do $\delta\pi_j (j = 1,..., f)$ là các đại lượng độc lập tuyến tính, từ (0.227) ta suy ra phương trình Gibbs-Appel cho hệ *p* vật rắn

$$\frac{\partial G}{\partial \ddot{\pi}_j} = \Pi_j \qquad (j = 1,..., f) \qquad (5.228)$$

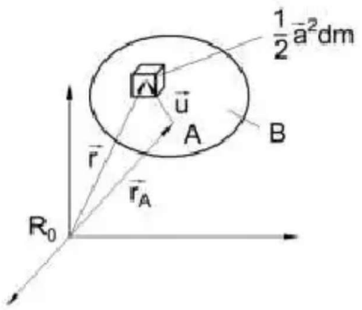
c) Biểu thức tính hàm Gibbs-Appel của hệ nhiều vật

** Trường hợp tổng quát*

Trong đoạn này ta thiết lập biểu thức tính hàm Gibbs-Appel cho một vật rắn và hệ nhiều vật rắn. Xét vật rắn B chuyển động trong hệ quy chiếu cố định R_0. Lấy A là một điểm bất kỳ thuộc vật rắn B. Từ hình 5.24 ta có

DO NOT COPY

$$\vec{r} = \vec{r}_A + \vec{u} \tag{5.229}$$



Hình 5.24. Vật rắn không gian

Đạo hàm biểu thức (0.229) theo *t* ở trong hệ quy chiếu R_0 ta được

$$\vec{v} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{u} \tag{5.230}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{u} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{u}) \tag{5.231}$$

Hàm Gibbs-Appel của vật rắn B theo định nghĩa có dạng

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{2}\int_B \vec{a}^2 dm = \frac{1}{2}\int_B \left[\vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{u} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{u})\right]^2 dm \\ &= \frac{1}{2}\int_B \{\vec{a}_A^2 + (\vec{\alpha} \times \vec{u})^2 + \left[\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{u})\right]^2 + 2\vec{a}_A.(\vec{\alpha} \times \vec{u}) + \\ &2\vec{a}_A.\left[\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{u})\right] + 2(\vec{\alpha} \times \vec{u}).\left[\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{u})\right]\} dm \end{aligned} \tag{5.232}$$

Ta lần lượt tính các số hạng của biểu thức (0.232)

$$\frac{1}{2}\int_B \vec{a}_A^2 dm = \frac{1}{2} m\vec{a}_A^2 \tag{5.233}$$

$$\frac{1}{2}\int_B (\vec{\alpha} \times \vec{\mu})^2 dm = \frac{1}{2}\vec{\alpha}.(\vec{\vec{I}}_A.\vec{\alpha}) \tag{5.234}$$

$$\int_B \vec{a}_A^2 (\vec{\alpha} \times \vec{u}) dm = \vec{a}_A.(\vec{\alpha} \times \int_B \vec{u} dm) = m\vec{a}_A.(\vec{\alpha} \times \vec{u}_C) \tag{5.235}$$

$$\int_B \vec{a}_A.\left[\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{u})\right]dm = \vec{a}_A.\left[\vec{\omega}\times\int_B(\vec{\omega}\times\vec{u})dm\right] = m\vec{a}_A.\left[\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{u}_C)\right] \quad (5.236)$$

Bây giờ ta chứng minh công thức sau

$$\int_B(\vec{\alpha}\times\vec{u}).\left[\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{u})\right]dm = \vec{\alpha}.\vec{\omega}\times(\vec{\vec{I}}.\vec{\omega}) \quad (5.237)$$

Thật vậy, ta có

$$(\vec{\alpha}\times\vec{u})\left[\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{u})\right] = (\vec{\alpha}\times\vec{u}).\left[(\vec{\omega}.\vec{u})\vec{\omega} - (\vec{\omega}.\vec{\omega})\vec{u}\right] \quad (5.238)$$

Chú ý đến các tính chất sau:

$$(\vec{\alpha}\times\vec{u}).\vec{u} = 0, (\vec{\alpha}\times\vec{u}).\vec{\omega} = (\vec{\omega}\times\vec{\alpha}).\vec{u}, (\vec{\omega}\times\vec{\alpha}).\vec{\omega} = 0 \quad (5.239)$$

Biểu thức trên có thể biến đổi thành:

$$\begin{aligned}&(\vec{\alpha}\times\vec{u}).\left[\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{u})\right] = (\vec{\alpha}\times\vec{u}).\left[(\vec{\omega}.\vec{u})\vec{\omega}\right] = (\vec{\omega}\times\vec{\alpha}).\left[(\vec{\omega}.\vec{u})\vec{u}\right]\\ &= (\vec{\alpha}\times\vec{u}).\left[(\vec{u}.\vec{u})\vec{\omega} - (\vec{\omega}.\vec{u})\vec{\omega}\right]\\ &= (\vec{\alpha}\times\vec{u}).\left[(\vec{u}\times(\vec{\omega}\times\vec{u})\right]\end{aligned} \quad (5.240)$$

Vậy ta có:

$$\begin{aligned}\int_B(\vec{\alpha}\times\vec{u}).\left[\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{u})\right]dm &= (\vec{\alpha}\times\vec{u}).\int_B\left[\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{u})\right]dm\\ &= (\vec{\alpha}\times\vec{\omega}).(\vec{\vec{I}}_A.\vec{\omega}) = \vec{\alpha}.\vec{\omega}\times(\vec{\vec{I}}_A.\vec{\omega})\end{aligned} \quad (5.241)$$

Chú ý rằng biểu thức:

$$\frac{1}{2}\int_B\left[\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{u})\right]^2 dm \quad (5.242)$$

Không phụ thuộc vào gia tốc nên không có vai trò gì khi đạo hàm hàm G theo tựa gia tốc.

Trong trường hợp vật rắn phẳng chuyển động trong mặt phẳng của nó, biểu thức (0.242*)* có dạng:

$$\frac{1}{2}\int_B\left[\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{u})\right]^2 dm = \frac{1}{2}I_A\omega^4 \quad (5.243)$$

Thật vậy, ta tính:

DO NOT COPY

$$\tilde{\omega}(\tilde{\omega}u)=\begin{bmatrix}0 & -\omega & 0\\ \omega & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -\omega & 0\\ \omega & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_x\\ u_y\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\omega^2u_y\\ \omega^2u_x\\ 0\end{bmatrix} \qquad (5.244)$$

Do đó:

$$\left[\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{u})\right]^2=\begin{bmatrix}-\omega^2u_y & \omega^2u_x & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\omega^2u_y\\ \omega^2u_x\\ 0\end{bmatrix}=\omega^4(u_x^2+u_y^2) \qquad (5.245)$$

Vậy:

$$\frac{1}{2}\int_B\left[\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{u})\right]^2dm=\frac{1}{2}\omega^4\int_B(u_x^2+u_y^2)dm=\frac{1}{2}I_A\omega^4 \qquad (5.246)$$

Thế các biểu thức (0.233) - (0.242) vào (0.232) ta được biểu thức:

$$\begin{aligned}G=&\frac{1}{2}m\vec{a}_A^2+\frac{1}{2}\vec{\alpha}.(\vec{\vec{I}}_A.\vec{\alpha})+m\vec{a}_A.(\vec{\alpha}\times\vec{u}_C)+m\vec{a}_A.\left[\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{u}_C)\right]\\&+\vec{\alpha}.\vec{\omega}\times(\vec{\vec{I}}_A.\vec{\omega})+\frac{1}{2}\int_B\left[\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{u})\right]^2dm\end{aligned} \qquad (5.247)$$

Khi thiết lập các phương trình Gibbs-Appel ta chỉ quan tâm đến phần hàm này phụ thuộc vào gia tốc, ta ký hiệu là G^- và gọi là hàm Gibbs-Appel theo nghĩa hẹp. Như vậy ta có

$$G^-=G-\frac{1}{2}\int_B\left[\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{u})\right]^2dm \qquad (5.248)$$

Từ (0.243) ta suy ra

$$\begin{aligned}G^-=&\frac{1}{2}m\vec{a}_A^2+\frac{1}{2}\vec{\alpha}.(\vec{\vec{I}}_A.\vec{\alpha})+m\vec{a}_A.(\vec{\alpha}\times\vec{u}_C)\\&+m\vec{a}_A.\left[\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{u}_C)\right]+\vec{\alpha}.\vec{\omega}\times(\vec{\vec{I}}_A.\vec{\omega})\end{aligned} \qquad (5.249)$$

Nếu ta chọn A là khối tâm C của vật rắn, thì $\vec{u}_C=0$. Từ (0.249) ta suy ra biểu thức tính hàm Gibbs-Appel theo nghĩa hẹp (bỏ qua phần không phụ thuộc gia tốc).

$$G^{-} = \frac{1}{2} m \vec{a}_C^2 + \frac{1}{2} \vec{\alpha}.(\vec{\vec{I}}_C.\vec{\alpha}) + \vec{\alpha}.\vec{\omega} \times (\vec{\vec{I}}_C.\vec{\omega}) \qquad (5.250)$$

Đối với hệ p vật rắn, hàm Gibbs-Appel theo nghĩa hẹp của hệ có dạng:

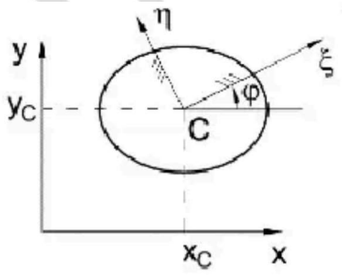
$$G^{-} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{p} \left[m_k \vec{a}_{Ck}^2 + \vec{\alpha}_k.(\vec{\vec{I}}_{Ck}.\vec{\alpha}_k) + 2\vec{\alpha}_k.\vec{\omega}_k \times (\vec{\vec{I}}_{Ck}.\vec{\omega}_k) \right] \qquad (5.251)$$

Trong đó m_k là khối lượng, $\vec{\omega}_k$ là vận tốc góc, $\vec{\alpha}_k$ là gia tốc góc của vật rắn thứ k, $\vec{\vec{I}}_{Ck}$ là tenxơ quán tính khối của vật rắn B_k đối với khối tâm C_k của nó. Dạng ma trận của hàm Gibbs-Appel theo nghĩa hẹp

$$G^{-} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{p} \left[m_k a_{Ck}^T a_{Ck} + \alpha_k^T (I_{Ck} \alpha_k) + 2\alpha_k^T \tilde{\omega}_k (I_{Ck} \omega_k) \right] \qquad (5.252)$$

Chú ý: Sau này để thuận tiện, đôi khi người ta cũng gọi hàm G^{-} là hàm Gibbs-Appel

** Một số trường hợp đặc biệt*



Hình 5.25. Vật rắn phẳng

Vật rắn chuyển động quay quanh một điểm cố định O. Ta chọn $A \equiv 0$, $\vec{\alpha}_A = \vec{\alpha}_0 = 0$

Từ (0.249) ta suy ra

$$G^{-} = \frac{1}{2} \vec{\alpha}.(\vec{\vec{I}}_0.\vec{\alpha}) + \vec{\alpha}.\vec{\omega} \times (\vec{\vec{I}}_0.\vec{\omega}) \qquad (5.253)$$

DO NOT COPY

Tấm phẳng chuyển động phẳng. Biểu thức (0.250*)* có thể viết lại dưới dạng ma trận:

$$G^{-} = \frac{1}{2} m a_C^T a_C + \frac{1}{2} \alpha^T (I_C \alpha) + \alpha^T (\tilde{\omega} I_C \omega) \qquad (5.254)$$

Từ hình 5.25 ta có:

$$a_C = \begin{bmatrix} \ddot{x}_C \\ \ddot{y}_C \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \omega = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix}, \qquad I_C = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \qquad (5.255)$$

Từ đó suy ra:

$$G^{-} = \frac{1}{2} m (\ddot{x}_C^2 + \ddot{y}_C^2) + \frac{1}{2} I_3 \alpha^2 \qquad (5.256)$$

Nếu chú ý đến biểu thức (0.242) ta có:

$$G = \frac{1}{2} m (\ddot{x}_C^2 + \ddot{y}_C^2) + \frac{1}{2} I_3 \alpha^2 + \frac{1}{2} I_3 \omega^4 \qquad (5.257)$$

d) Các thí dụ áp dụng

Thí dụ 5.13: Cho hệ con lắc kép vật lí như hình 5.26. Cho biết OA=l; $OC_1=a_1$; $OC_2= a_2$; khối lượng các khâu là m_1, m_2, mômen quán tính khối đối với các trụ thẳng đứng đi qua khối tâm là I_1, I_2. Áp dụng phương trình Gibbs-Appel thiết lập phương trình vi phân chuyển động của hệ.

Lời giải: Theo thí dụ 5.11 ta có

$$\vec{a}_{C1} = (a_1\ddot{\varphi}_1 \cos\varphi_1 - a_1\dot{\varphi}_1^2 \sin\varphi_1)\vec{e}_x^{(0)} + (a_1\ddot{\varphi}_1 \sin\varphi_1 + a_1\dot{\varphi}_1^2 \cos\varphi_1)\vec{e}_y^{(0)} \qquad (1)$$

$$\begin{aligned} \vec{a}_{C2} = {} & (l_1\ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \alpha) + a_2\ddot{\varphi}_2 \cos\varphi_2 - l\dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \alpha) - a_2\dot{\varphi}_2^2 \sin\varphi_2)\vec{e}_x^{(0)} \\ & + (l_1\ddot{\varphi}_1 \sin(\varphi_1 - \alpha) + a_2\ddot{\varphi}_2 \sin\varphi_2 + l\dot{\varphi}_1^2 \cos(\varphi_1 - \alpha) + a_2\dot{\varphi}_2^2 \cos\varphi_2)\vec{e}_y^{(0)} \end{aligned} \qquad (2)$$

Hàm Gibbs-Appel theo nghĩa hẹp trong thí dụ này có dạng

$$G^{-} = \frac{1}{2} m_1 a_{C1}^2 + \frac{1}{2} I_1 \ddot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 a_{C2}^2 + \frac{1}{2} I_2 \ddot{\varphi}_2^2 \qquad (3)$$

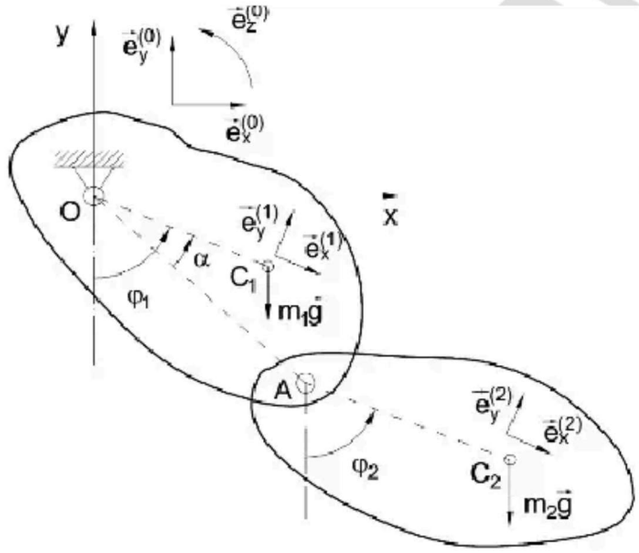
Thế các biểu thức (1), (2) vào (3) ta được

$$G^{-} = \frac{1}{2} m_1 \left[(a_1 \ddot{\varphi}_1 \cos\varphi_1 - a_1 \dot{\varphi}_1^2 \sin\varphi_1)^2 + (a_1 \ddot{\varphi}_1 \sin\varphi_1 + a_1 \dot{\varphi}_1^2 \cos\varphi_1)^2 \right]$$

$$+ \frac{1}{2} m_2 \{ (l_1 \ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \alpha) + a_2 \ddot{\varphi}_2 \cos\varphi_2 - l \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \alpha) \quad (4)$$

$$- a_2 \dot{\varphi}_2^2 \sin\varphi_2)^2 + (l_1 \ddot{\varphi}_1 \sin(\varphi_1 - \alpha) + a_2 \ddot{\varphi}_2 \sin\varphi_2 + l \dot{\varphi}_1^2 \cos(\varphi_1 - \alpha)$$

$$+ a_2 \dot{\varphi}_2^2 \cos\varphi_2)^2 \} + \frac{1}{2} I_1 \ddot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \ddot{\varphi}_2^2$$



Hình 5.26. Con lắc kép vật lý

Trong thí dụ này ta chọn các tựa gia tốc là:

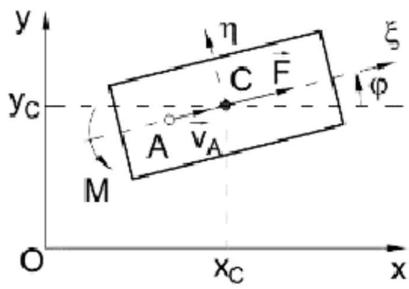
$$\frac{\partial G^{-}}{\partial \ddot{\varphi}_1} = Q_1, \quad \frac{\partial G^{-}}{\partial \ddot{\varphi}_2} = Q_2 \quad (5)$$

Ta nhận được hệ hai phương trình vi phân chuyển động của con lắc kép có dạng như sau:

$$\begin{cases} (I_1 + m_1 a_1^2 + m_2 l^2)\ddot{\varphi}_1 + m_2 l a_2 \ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \alpha - \varphi_2) \\ +m_2 l a_2 \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \alpha - \varphi_2) + m_1 g a_1 \sin\varphi_1 + m_2 g l \sin(\varphi_1 - \alpha) = 0 \\ m_2 l a_2 \ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \alpha - \varphi_2) + (I_2 + m_2 c_2^2)\ddot{\varphi}_2 \\ -m_2 l a_2 \sin(\varphi_1 - \alpha - \varphi_2)\dot{\varphi}_1^2 + m_2 g a_2 \sin\varphi_2 = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Thí dụ 5.14: Một xe trượt chuyển động thẳng (Hình 5.27) được xem như một tấm chữ nhật đồng nhất, khối lượng *m*, mômen quán tính khối đối với trục vuông góc mặt phẳng tấm và đi qua khối tâm I_C. Tại điểm *A* hướng dọc theo *AC*. Tác dụng lên xe trượt một lực $\vec{F}$ luôn hướng theo AC và một ngẫu lực có mômen *M* nằm trong mặt phẳng chuyển động. Bỏ qua ma sát. Áp dụng phương trình Gibbs-Appel lập phương trình chuyển động của xe.

Lời giải: Ta xem xe trượt là một vật rắn phẳng chuyển động trong mặt phẳng của nó. Chọn các tọa độ suy rộng là



Hình 5.27. Mô hình xe trượt

$$q_1 = x_C, q_2 = y_C, q_3 = \varphi \quad (1)$$

Chọn $C\xi\eta$ là hệ trục quán tính chính trung tâm của tấm. Phương trình liên kết phi hôlônôm được thiết lập như sau. Do giả thiết các bánh xe tạo cho điểm A có vận tốc $\vec{v}_A$ luôn hướng theo *AC* ta có phương trình liên kết:

$$\frac{\dot{x}_A}{a\cos\varphi} = \frac{\dot{y}_A}{a\sin\varphi} \quad (2)$$

Từ hình 5.27 ta có:

$$\begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_A \\ \dot{y}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_C \\ \dot{y}_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\sin\varphi & -\cos\varphi \\ \cos\varphi & -\sin\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Từ (4) ta suy ra:

$$\dot{x}_A = \dot{x}_C + a\dot{\varphi}\sin\varphi, \quad \dot{y}_A = \dot{y}_C - a\dot{\varphi}\cos\varphi \quad (5)$$

Thế (5) vào (2) ta được

$$\begin{aligned} &(\dot{x}_C + a\dot{\varphi}\sin\varphi)a\sin\varphi = (\dot{y}_C - a\dot{\varphi}\cos\varphi)a\cos\varphi \\ &\Rightarrow \dot{x}_C\sin\varphi - \dot{y}_C\cos\varphi + a\dot{\varphi} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Phương trình (6) là phương trình liên kết phi hôlônôm (vì không khả tích). Xe trượt được xác định bởi ba tọa độ x_C, y_C, φ, nhưng vận tốc của các tọa độ này bị ràng buộc bởi phương trình (6) nên hệ chỉ có hai bậc tự do (tọa độ tối thiểu là ba, vận tốc tối thiểu là hai).

Bây giờ ta chuyển sang áp dụng phương trình Gibbs-Appel thiết lập các phương trình vi phân chuyển động của xe. Theo (5.257) hàm Gibbs-Appel trong thí dụ này có dạng:

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{2}m(\ddot{x}_C^2 + \ddot{y}_C^2) + \frac{1}{2}I_C\ddot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}I_C\dot{\varphi}^4 \\ G^- &= \frac{1}{2}m(\ddot{x}_C^2 + \ddot{y}_C^2) + \frac{1}{2}I_C\ddot{\varphi}^2 \end{aligned} \quad (7)$$

Ta chọn các tựa vận tốc là $\dot{\pi}$ và $\dot{\varphi}$ (các tựa tọa độ là π và φ) theo các hệ thức sau:

$$\begin{aligned} &\dot{x}_C\sin\varphi - \dot{y}_C\cos\varphi = -a\dot{\varphi} \\ &\dot{x}_C\cos\varphi + \dot{y}_C\sin\varphi = \dot{\pi} \end{aligned} \quad (8)$$

Từ (8) giải ra được:

$$\dot{x}_C = \dot{\pi}c\cos\varphi\text{-a}\dot{\varphi}\sin\varphi, \qquad \dot{y}_C = \dot{\pi}\sin\varphi + \text{a}\dot{\varphi}c\cos\varphi \quad (9)$$

DO NOT COPY

Đạo hàm biểu thức (9) theo thời gian ta được:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_C &= (\ddot{\pi} - a\dot{\varphi}^2)c\cos\varphi\text{-}(a\ddot{\varphi} + \dot{\pi}\dot{\varphi})\sin\varphi \\ \ddot{y}_C &= (\ddot{\pi} - a\dot{\varphi}^2)\sin\varphi + (a\ddot{\varphi} + \dot{\pi}\dot{\varphi})c\cos\varphi\end{aligned} \qquad (10)$$

Bình phương hai vế của phương trình (10) rồi cộng lại ta được:

$$\ddot{x}_C^2 + \ddot{y}_C^2 = (\ddot{\pi} - a\dot{\varphi}^2)^2 + (a\ddot{\varphi} + \dot{\pi}\dot{\varphi})^2 \qquad (11)$$

Thế (11) vào (7) ta được:

$$G^{-} = \frac{1}{2}m[(\ddot{\pi} - a\dot{\varphi}^2)^2 + (a\ddot{\varphi} + \dot{\pi}\dot{\varphi})^2] + \frac{1}{2}I_C\ddot{\varphi}^2 \qquad (12)$$

Từ đó suy ra:

$$\frac{\partial G}{\partial \ddot{\pi}} = m(\ddot{\pi} - a\dot{\varphi}^2), \quad \frac{\partial G}{\partial \ddot{\varphi}} = ma(a\ddot{\varphi} + \dot{\pi}\dot{\varphi}) + I_C\ddot{\varphi} \qquad (13)$$

Bây giờ ta chuyển sang xác định các tựa lực suy rộng ứng với các tựa tọa độ π và φ

$$\sum \delta A_k = \vec{F}.\delta\vec{r}_C + M\delta\varphi = F(c\cos\varphi\delta x_C + \sin\varphi\delta y_C) + M\delta\varphi \qquad (14)$$

Từ (8) ta có:

$$\begin{cases} \delta\pi = \delta x_C\cos\varphi + \delta y_C\sin\varphi \\ -a\delta\varphi = \delta x_C\sin\varphi - \delta y_C\cos\varphi \end{cases} => \begin{cases} \delta x_C = \delta\pi\cos\varphi - a\delta\varphi\sin\varphi \\ \delta y_C = \delta\pi\sin\varphi + a\delta\varphi\cos\varphi \end{cases} \qquad (15)$$

Thế (15) vào (14) ta được:

$$\begin{aligned}\sum \delta A_k = \vec{F}.\delta\vec{r}_C + M\delta\varphi &= F\cos\varphi(\delta\pi\cos\varphi - a\delta\varphi\sin\varphi) \\ &+ F\sin\varphi(\delta\pi\sin\varphi + a\delta\varphi\cos\varphi) + M\delta\varphi \\ \sum \delta A_k &= F\delta\pi + M\delta\varphi\end{aligned} \qquad (16)$$

Từ (16) suy ra các tựa lựa suy rộng:

$$\Pi_1 = F, \qquad \Pi_2 = M \qquad (17)$$

Vậy phương trình vi phân chuyển động của xe trượt có dạng:

$$m(\ddot{\pi} - a\dot{\varphi}^2) = F, \quad (I_C + ma^2)\ddot{\varphi} + ma\dot{\pi}\dot{\varphi} = M \tag{18}$$

Trở lại các tọa độ tối thiểu x_C, y_C, φ. Thế các biểu thức:

$$\begin{aligned} \dot{\pi} &= \dot{x}_C \cos\varphi + \dot{y}_C \sin\varphi \\ \ddot{\pi} &= \ddot{x}_C \cos\varphi - \dot{x}_C \dot{\varphi} \sin\varphi + \ddot{y}_C \sin\varphi + \dot{y}_C \dot{\varphi} \cos\varphi \end{aligned} \tag{19}$$

Vào hệ phương trình (18) ta được hệ hai phương trình vi phân chuyển động:

$$\begin{aligned} &m(\ddot{x}_C \cos\varphi + \ddot{y}_C \sin\varphi - \dot{x}_C \dot{\varphi} \sin\varphi + \dot{y}_C \dot{\varphi} \cos\varphi - a\dot{\varphi}^2) = F \\ &(I_C + ma^2)\ddot{\varphi} + ma(\dot{x}_C \dot{\varphi} \cos\varphi + \dot{y}_C \dot{\varphi} \sin\varphi) = M \end{aligned} \tag{20}$$

Ngoài ra ta còn có phương trình liên kết phi hôlônôm:

$$\dot{x}_C \sin\varphi - \dot{y}_C \cos\varphi - a\dot{\varphi} = 0 \tag{21}$$

Như vậy một hệ phương trình đầy đủ bao gồm các phương trình Gibbs-Appel và các phương trình liên kết phi hôlônôm. Đây là điểm khác nhau giữa các hệ hôlônôm và các hệ phi hôlônôm.

Câu hỏi ôn tập

Câu 5.1. Trình bày các bước áp dụng phương trình Newton – Euler để thiết lập các phương trình vi phân chuyển động của hệ nhiều vật hôlônôm có cấu trúc cây. Phương pháp đưa phương trình vi phân chuyển động về dạng tối giản.

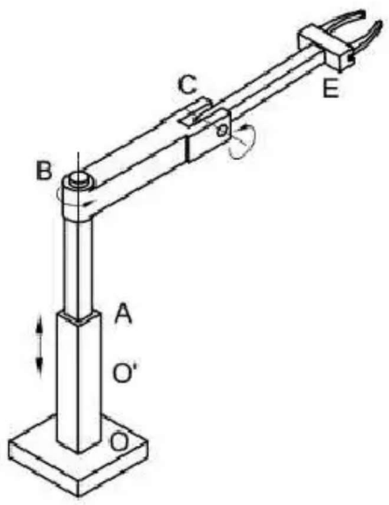
Câu 5.2. Trình bày các bước áp dụng phương trình Lagarange loại hai để thiết lập phương trình vi phân chuyển động của hệ nhiều vật hôlônôm có cấu trúc cây.

Câu 5.3. Cho mô hình cánh tay robot như hình vẽ. Các động cơ dẫn động của robot được đặt vào các khớp A, B, C. Gọi điểm tác động cuối là điểm giữa tay kẹp E. Các khâu làm bằng thép hộp đặc có mặt cắt không đổi, coi là tuyệt đối cứng.

DO NOT COPY

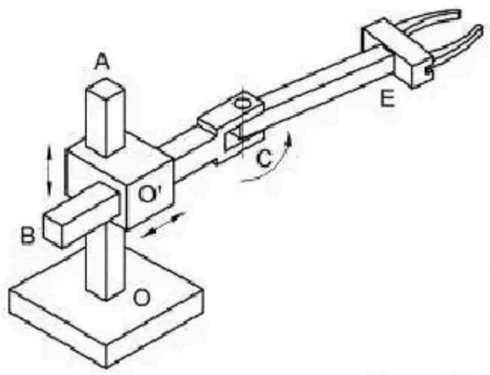
Viết các phương trình động lực học của robot. Tính toán **mômen** của các động cơ đặt tại khớp A, B, C sao cho cánh tay nâng được vật có khối lượng 15 kg di chuyển trên đoạn thẳng MN (tọa độ của M, N tự cho). Vẽ các đồ thị vị trí, vận tốc, gia tốc của khớp A, B, C và điểm E. Vẽ đồ thị **mômen** của khớp A, B, C.

Cho các thông số: OA=500mm; O'B=500mm; BC=450mm; CE=500mm. Tiết diện mặt cắt các khâu: OA, AB, BC là 50x50mm; CE: 40x40mm.



Hình 5.16

Câu 5.4. Cho mô hình cánh tay robot như hình vẽ. Động cơ dẫn động của robot được đặt vào các khớp O, O', C. Gọi điểm tác động cuối là giữa tay kẹp E. Các khâu làm bằng thép hộp đặc có mặt cắt không đổi, coi là tuyệt đối cứng.



Hình 5.17

Viết các phương trình động lực học. Tính toán **mômen** của các động cơ đặt tại khớp O, O', C sao cho cánh tay nâng được vật có khối lượng 15 kg di chuyển trên đoạn thẳng MN (tọa độ của M, N tự cho). Vẽ các đồ thị vị trí, vận tốc, gia tốc của khớp O, O', C và điểm E. Vẽ đồ thị **mômen** của khớp O, O', C.

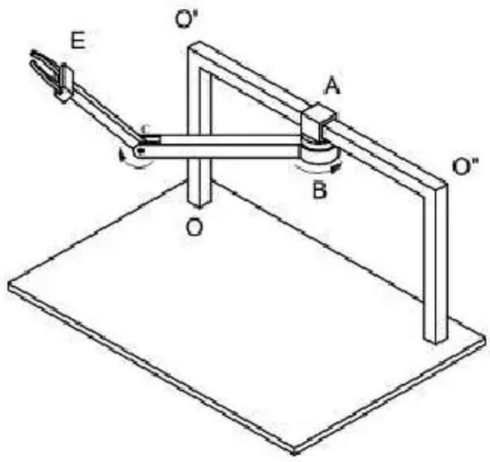
Cho các thông số: OA=450mm; BC=400mm; CE=400mm. Tiết diện mặt cắt các khâu: OA, BC là 50x50mm; CE: 40x40mm.

Câu 5.5. Cho mô hình cánh tay robot như hình 5.18. Động cơ dẫn động của robot được đặt vào các khớp A, B, C. Gọi điểm tác động cuối là giữa tay kẹp E. Các khâu làm bằng thép hộp đặc có mặt cắt không đổi, coi là tuyệt đối cứng.

Viết các phương trình động lực học. Tính toán **mômen** của các động cơ đặt tại khớp A, B, C sao cho cánh tay nâng được vật có khối lượng 15 kg di chuyển trên đoạn thẳng MN (tọa độ của M, N tự cho). Vẽ các đồ thị vị trí, vận tốc, gia tốc của khớp A, B, C và điểm E. Vẽ đồ thị **mômen** của khớp A, B, C.

Cho các thông số: OO'=670mm; O'O"=1240mm; AB=105mm; BC=580mm; CE=370mm. Tiết diện mặt cắt các khâu: OO', O'O" là 60x60mm; AB: 90x90mm; BC:60x60mm; CE:40x40mm.

DO NOT COPY



Hình 5.18

6. TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Nguyễn Văn Khang. Động lực học hệ nhiều vật. NXB Khoa học Kỹ thuật, Hà nội 2007.

[2] Nguyễn Văn Đạo. Cơ học giải tích. NXB Đại học Quốc gia, Hà nội, 2002.

[3] Vũ Công Hàm. Cơ học hệ nhiều vật. NXB Quân Đội Nhân Dân, Hà nội 2013.

[4] Đinh Văn Phong. Phương pháp số trong cơ học. NXB Khoa học Kỹ thuật, Hà nội 1999.

[5] Jazar, Reza N. Advanced Dynamics. John Wiley, Hoboken, 2011.

[6] Angeles, Jorge, and Andrés Kecskemethy, eds. Kinematics and dynamics of multi-body systems. Vol. 360. Springer, 2014.

[7] Schaub, Hanspeter, and John L. Junkins. Analytical mechanics of space systems. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2005.

[8] Sciavicco, Lorenzo, and Bruno Siciliano. Modelling and control of robot manipulators. Springer Science & Business Media, 2012.

DO NOT COPY

7. PHỤ LỤC

ĐỘNG LỰC HỌC HỆ NHIỀU VẬT

LƯU HÀNH NỘI BỘ

Chịu trách nhiệm xuất bản: ……..

Chịu trách nhiệm bản thảo: HỌC VIỆN KỸ THUẬT QUÂN SỰ

Biên tập: PHÒNG QUÂN SỰ NXBQĐ

Sửa bản in: ……..

Trình bày: ……..

Bìa: ……...

NHÀ XUẤT BẢN QUÂN ĐỘI NHÂN DÂN

23 Lý Nam Đế, Hoàn Kiếm, Hà Nội

Website: http://nxbqdnd.com.vn

Email: nbxqdnd@nxbqdnd.com.vn

ĐT: (04)38455766 - (04)3740780 - Fax: (04)37471106

Chi nhánh tại Thành phố Hồ Chí Minh

Số 161 - 163 Trần Quốc Thảo, Phường 9, Quận 3

ĐT: (069)667452 - (08)62565588 - Fax: (08)62565588

Cơ quan đại diện tại thành phố Cần Thơ

Phi trường 31 - đường Cách mạng Tháng Tám

ĐT: (069)629905 - (0710)3814772 - Fax: (0710)3814772

Cơ quan đại diện tại thành phố Đà Nẵng

Số 86 Nguyễn Chánh, quận Liên Chiểu

ĐT: (0511)6250803 - Fax: (0511)6250803

In xong: /2019 Nộp lưu chiểu: /2019

Khổ sách: 19x27cm. Số trang: 250 trang. Số lượng: 150 cuốn.

Số đăng ký kế hoạch xuất bản: 1850-2018/CXBIPH/3-200/QĐND

Quiết định xuất bản: số /QĐLKI ngày tháng năm 2019.

In và đóng sách tại: Xưởng in Học viện Kỹ thuật Quân sự.

Địa chỉ: Số 236 Đường Hoàng Quốc Việt – Cầu Giấy – Hà Nội

Số in:

DO NOT COPY

ISBN: